KAPITEL 3

Unterräume des $\mathbb{R}^n$

1. Die Definition eines Unterraums

Mengen, mit denen man so rechnen kann wie mit Vektoren, werden wir als *Vektorräume* bezeichnen. Wir behandeln zunächst den für die Geometrie wichtigsten Vektorraum, nämlich $\mathbb{R}^3$, und, in Verallgemeinerung davon, für jedes $n \in \mathbb{N}$, den Vektorraum

$$\mathbb{R}^n = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ schreiben wir $x(i)$, $x[i]$, und x_i für den i-ten Eintrag von x.

Manche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen bezüglich der Addition von Vektoren und der Multiplikation mit reellen Zahlen. Solche Teilmengen bezeichnen wir als *Unterräume* des $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION 3.1. $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *Unterraum* des $\mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow$

(1) Die Menge T enthält zumindest ein Element.
(2) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $t \in T$ gilt $\lambda \cdot t \in T$.
(3) Für alle $t_1, t_2 \in T$ gilt $t_1 + t_2 \in T$.

Wir geben einige Beispiele von Unterräumen des $\mathbb{R}^n$:

BEISPIELE 3.2.

(1) $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^2$. Begründung: Wegen $(0, 0) \in T_1$ ist die Menge T_1 nicht leer. Sei $(u, v) \in T_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $2u - 3v = 0$ und damit $2(\lambda u) - 3(\lambda v) = 0$, also gilt $\lambda \cdot (u, v) \in T_1$. Für $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in T_1$ gilt $2\cdot(u_1+u_2)-3\cdot(v_1+v_2) = 2u_1-3v_1+2u_2-3v_2 = 0$, also ist $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) \in T_1$.
    Damit haben wir gezeigt, dass T_1 ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$ ist.
(2) $T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y = 1\}$ ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^2$, denn $(1, -1) \in T_2$, aber $2 \cdot (1, -1) \notin T_2$.

[0]Unterlagen zur Vorlesung Algebra von Erhard Aichinger, Peter Mayr. 15.11.2007.

(3) $T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid$ es gibt $s, t \in \mathbb{R}$, sodass $(x, y, z) = s\cdot(1, -2, 4)+t\cdot(0, 1, 8)\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
(4) $T_4 = \{(0, 0)\}$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
(5) $T_5 = \{(0, 1)\}$ ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^2$, da $2 \cdot (0, 1) \notin T_5$.

ÜBUNGSAUFGABEN 3.3.

(1) Vervollständigen Sie die folgenden Begründungen dafür, dass die Menge

$$T = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid \text{ es gibt } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$$

die Unterraumeigenschaften (V1) und (V2) erfüllt.
   (a) T ist nicht die leere Menge, weil ____________________.
   (b) *Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $t \in T$ liegt $\lambda \cdot t$ in T:* Wir fixieren t aus T und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass ______________ in ______ liegt. Da t in T liegt, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $t = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Um zu zeigen, dass $\lambda \cdot t$ in T liegt, müssen wir ein $\alpha' \in \mathbb{R}$ finden, sodass

$$\lambda \cdot t = \alpha' \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

   Nun wissen wir, dass $t = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Daher gilt $\lambda \cdot t =$ ______________. Das heißt, dass für $\alpha' =$ __________ gilt:

$$\lambda \cdot t = \alpha' \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

   Daher liegt auch ______________ in T.
(2) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.
   (a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$.
   (b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 1\}$.
(3) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.
   (a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\lambda \in \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\}$.
   (b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\lambda \in \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -12 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\}$.
(4) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.
   (a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 0\}$.
   (b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^2 = 0\}$.
(5) Zeigen Sie: Wenn ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$) zwei Punkte enthält, so enthält er bereits die gesamte Verbindungsgerade.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit rechter Seite = 0 ist immer ein Unterraum.

SATZ 3.4. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $U = \{x \mid A \cdot x = 0\}$.

(1) Wegen $0 \in U$ ist U nicht die leere Menge.
(2) Sei $x \in U, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lambda \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = 0$, d.h. $\lambda \cdot x \in U$.
(3) Seien $u, v \in U$. Dann gilt $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v = 0$, d.h. $u + v \in U$.

Somit ist U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. ∎

AUFGABE 3.5. Wir bestimmen diesen Unterraum für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Als Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$ erhalten wir

$$L = \{(-2\,t, -3\,t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Die lineare Hülle von Vektoren

DEFINITION 3.6. Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$L(v_1, \ldots, v_m) := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

heißt die *lineare Hülle* der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$.

$L(\binom{3}{2})$ ist also die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch $\binom{0}{0}$ und $\binom{6}{4}$ geht. $L(\,)$ definiert man als $\{\vec{0}\}$.

Die lineare Hülle von $v_1, \ldots, v_m$ ist der kleinste Unterraum, der $v_1, \ldots, v_m$ enthält:

SATZ 3.7. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \ldots, v_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

(1) *$L(v_1, \ldots, v_m)$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.*
(2) *Sei M ein Unterraum der $v_1, \ldots, v_m$ enthält. Dann gilt $L(v_1, \ldots, v_m) \subseteq M$.*

Wollen wir etwa überprüfen, ob z.B. $(3, 0, 1)$ in der linearen Hülle von $(2, 1, -3)$ und $(7, 2, -5)$ liegt, müssen wir ein Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{das heißt} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen wir dieses System, so erhalten wir $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Also ist $(3, 0, 1)$ eine Linearkombination von $(2, 1, -3)$ und $(7, 2, -5)$, und liegt somit in der linearen Hülle dieser beiden Vektoren.

SATZ 3.8. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, seien $b_1, b_2, \ldots, b_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, und sei $\overline{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ die Matrix mit den Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_m$ als Spaltenvektoren. Dann liegt v genau dann in $L(b_1, \ldots, b_m)$, wenn das Gleichungssystem $\overline{B} \cdot x = v$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^m$ hat.*

ÜBUNGSAUFGABEN 3.9.

(1) Liegt $\binom{2}{-1}$ in der linearen Hülle von $\binom{0}{0}, \binom{1}{2}, \binom{-2}{-4}$?
(2) Liegt $\binom{1}{-5}$ in der linearen Hülle von $\binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \binom{1}{4}$?
(3) Testen Sie, ob $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ liegt.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei M eine (möglicherweise unendliche) Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die lineare Hülle von M als

$$L(M) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot m_i \,|\, k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ m_1, \ldots, m_k \in M\}.$$

Die lineare Hülle von M ist also die Menge aller Linearkombinationen endlich vieler Vektoren aus M.

DEFINITION 3.10. Für eine $m \times n$-Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ definieren wir ihren *Zeilenraum* $Z(A)$ als die lineare Hülle der Zeilen von A. Der Zeilenraum ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Den *Spaltenraum* $S(A)$ definieren wir als die lineare Hülle der Spalten von A. Der Spaltenraum ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$.

Den *Nullraum* $N(A)$ definieren wir als die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Er ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

3. Die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

DEFINITION 3.11. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \ldots, v_m$ in $\mathbb{R}^n$. Die Folge $(v_1, \ldots, v_m)$ heißt *linear unabhängig*, wenn für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_m \cdot v_m = 0$$

gilt, dass alle $\lambda_i = 0$ sind.

Man sagt dann oft auch einfach, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind. Als Spezialfall definiert man noch für $m = 0$, dass die Folge () aus 0 Vektoren immer linear unabhängig ist.

Vektoren $v_1, \ldots, v_m$, die nicht linear unabhängig sind, nennt man *linear abhängig*. Die Folge $(v_1, \ldots, v_m)$ ist also genau dann linear abhängig, wenn es $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ gibt, sodass $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i = 0$.

AUFGABE 3.12. Sind $(3, 2)$ und $(1, 3)$ linear unabhängig ?

Lösung. Wir betrachten

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses System besitzt nur die Lösung $(0, 0)$. Daher sind die beiden Vektoren linear unabhängig.

AUFGABE 3.13. Sind $(3, 2)$, $(1, 4)$ und $(5, 3)$ linear unabhängig ?

Lösung. Hier erhalten wir

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des Gleichungssystems ist $\lambda_1 = -1.7$, $\lambda_2 = 0.1$ und $\lambda_3 = 1$. Die drei Vektoren sind also linear abhängig.

SATZ 3.14. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, seien $b_1, b_2, \dots, b_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, und sei $\overline{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ die Matrix mit den Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_m$ als Spaltenvektoren. Dann sind $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ genau dann linear abhängig, wenn das System $\overline{B} \cdot x = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ hat.*

SATZ 3.15. *Sei $m \geq 1$ und seien $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

(1) *$(b_1, \dots, b_m)$ ist linear abhängig.*
(2) *Es gibt ein $k \in \{1, \dots, m\}$, sodass b_k in $L(b_1, \dots, b_{k-1})$ liegt.*
(3) *Es gibt ein $k \in \{1, \dots, m\}$, sodass $L(b_1, \dots, b_m) = L(\{b_1, \dots, b_m\} \setminus \{b_k\})$.*

SATZ 3.16. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \dots, v_m, v \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig sind. Dann sind äquivalent:*

(1) *$v \in L(v_1, \dots, v_m)$.*
(2) *$(v_1, \dots, v_m, v)$ ist linear abhängig.*

ÜBUNGSAUFGABEN 3.17.

(1) Zeigen Sie, dass die Vektoren $(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix})$ linear abhängig sind, indem Sie eine Linearkombination finden, bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird, und die trotzdem den Nullvektor ergibt.
(2) Testen Sie jeweils, ob folgende Mengen von Vektoren linear abhängig sind. Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, und bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird.
   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(3) Sind $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -25 \end{pmatrix}$ linear abhängig?
(4) Sind die Vektoren $(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix})$ linear abhängig?
(5) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ an, sodass $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und v linear abhängig sind.
(6) Finden Sie drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (b, c) linear unabhängig und (a, b, c) linear abhängig sind.
(7) Vervollständigen Sie die Begründung für folgende Aussage.

   Seien $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$ so, dass w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt. Dann sind (v_1, v_2, w) linear abhängig.

   Begründung: Da w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt, gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

   $$w = \underline{\hspace{6cm}}.$$

   Daher gilt

   $$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \underline{\hspace{3cm}} = 0.$$

   Das ist eine Linearkombination, die 0 ergibt, obwohl nicht jeder Vektor ________ mal genommen wurde. Daher sind (v_1, v_2, w) ________.

4. Basen eines Vektorraums

4.1. Definition.

DEFINITION 3.18. Sei T Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Die Folge $B = (b_1, \dots, b_m)$ heißt Basis von T $:\Leftrightarrow$

(1) $b_1, \dots, b_m$ sind linear unabhängig,
(2) $L(b_1, \dots, b_m) = T$.

Wir geben einige Beispiele:

BEISPIEL 3.19.

(1) $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$: Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lässt sich als
$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
schreiben, und liegt somit in der linearen Hülle von $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Somit ist die lineare Hülle der Vektoren $\{(1, 0), (0, 1)\}$ der ganze $\mathbb{R}^2$. Die beiden Vektoren sind außerdem linear unabhängig.
(2) $\{(2, 3)\}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^2$, da es kein λ gibt, sodass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
(3) $\{(2, 3)\}$ ist Basis von $L((2, 3))$.

Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann ist eine Basis eine Möglichkeit, die Menge U anzugeben. Mathematica nutzt das, um die Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ durch die Funktion `NullSpace` auszugeben. Dabei wird der unendliche Raum $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$ durch eine Basis dieses Raums angegeben.

```
In[25]:= A = {{1, 2, 3}}
Out[25]= {{1, 2, 3}}

In[26]:= NullSpace[A]
Out[26]= {{-3, 0, 1}, {-2, 1, 0}}
```

ÜBUNGSAUFGABEN 3.20.

(1) Finden Sie eine Basis B der Ebene $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$, die weder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ noch $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält.

4.2. Bestimmen der Basis eines Unterraums. Wir können Unterräume des $\mathbb{R}^n$ auf zwei Arten angeben.

- explizit, das heißt, als lineare Hülle von Vektoren.
- implizit, das heißt, durch ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge der anzugebende Unterraum ist.

Wir überlegen uns als erstes, wie wir eine Basis eines explizit gegebenen Unterraums berechnen können. Dazu berechnen wir die Basis des Raums

$$V = L(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -33 \\ 17 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 85 \\ -44 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Wir wollen also eine Basis des Zeilenraums der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ -33 & 17 & 1 & -1 \\ 85 & -44 & -3 & 2 \\ -19 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Der Zeilenraum ändert sich nicht, wenn wir eine Zeile mit einer von 0 verschiedenen Zahl multiplizieren, oder wenn wir zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addieren. Wir können uns also jetzt systematisch Matrizen erzeugen, die alle den gleichen Zeilenraum haben wie die ursprüngliche Matrix. Das machen wir mit Mathematica.

```
In[27]:= << RowRed2.m

In[28]:= RowEchelonForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ -33 & 17 & 1 & -1 \\ 85 & -44 & -3 & 2 \\ -19 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -28 & -38 \\ 0 & 7 & 14 & 19 \\ 0 & -7 & -14 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -28 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Out[28]= {{{1, 0, 0, 0}, {-33, 5, 0, 0}, {1, 5, 2, 0}, {-5, -5, 0, 10}},
          {{-5, 3, 1, 1}, {0, -14, -28, -38},
           {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}
```

Wir haben also eine Matrix in Zeilenstaffelform erzeugt, deren Zeilenraum der gleiche wie der Zeilenraum der gegebenen Matrix ist.

ALGORITHMUS 3.21 (Zeilenstaffelform).
Eingabe: Eine $m \times n$-Matrix A.
Ausgabe: Eine $m \times n$-Matrix B, sodass B in Zeilenstaffelform ist, und $Z(A) = Z(B)$.

$B \leftarrow A$
zeile $\leftarrow 1$
spalte $\leftarrow 1$
while *zeile* $\leq m$

```
      do while spalte ≤ n und B(i, spalte) = 0 für alle i mit zeile ≤ i ≤ m
            do spalte ← spalte + 1
         if spalte ≤ n
            then gewaehlteZeile ← ein i, sodass zeile ≤ i ≤ m und B(i, spalte) ≠ 0
                 if gewaehlteZeile ≠ zeile
                    then Vertausche die gewaehlteZeile-te mit der zeile-ten Zeile von B
                 i ← zeile + 1
                 while i ≤ m
                    do Addiere passendes Vielfaches der zeile-ten Zeile zur i-ten Zeile von B, sodass B(i, spalte) = 0
                       i ← i + 1
         zeile ← zeile + 1
         spalte ← spalte + 1
return B
```

Dieser Algorithmus liefert also folgenden Satz.

SATZ 3.22. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann gibt es eine Matrix B in Zeilenstaffelform, sodass $Z(A) = Z(B)$.*

Die Zeilen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die nicht 0 sind, sind linear unabhängig. Daher haben wir auch eine Basis von

$$V = L((-5, 3, 1, 1), (-33, 17, 1, -1), (85, -44, -3, 2), (-19, 10, 1, 0))$$

gefunden, nämlich

$$B = (\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -28 \\ -38 \end{pmatrix}).$$

Wir fassen zusammen:

ALGORITHMUS 3.23 (Basis eines explizit gegebenen Unterraums).
Eingabe: Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$.
Ausgabe: Eine Basis $b_1, \dots, b_k$ von $L(v_1, \dots, v_m)$.

```
Bilde die m × n-Matrix V, in deren Zeilen die Vektoren v_1, …, v_m stehen
Berechne eine Matrix B in Zeilenstaffelform, sodass Z(V) = Z(B)
return (b_1, …, b_k) als jene Zeilen von B, die nicht 0 sind
```

Was wir noch nicht begründet haben ist, dass die Zeilen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die nicht 0 sind, linear unabhängig sind. Betrachten wir dazu die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 14 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 67 & 76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, dass die von 0 verschiedenen Zeilen von A linear unabhängig sind, müssen wir zeigen, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 14 & 67 \\ 7 & 17 & 76 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung $(0, 0, 0)$ hat. Wir sehen, dass uns die erste Gleichung $\lambda_1 = 0$, dann die dritte Gleichung $\lambda_2 = 0$, und dann die fünfte Gleichung $\lambda_3 = 0$ liefert.

Das machen wir jetzt allgemein:

SATZ 3.24. *Sei A eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstaffelform. Dann sind die Zeilen von A, die nicht* 0 *sind, linear unabhängige Vektoren im* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Seien $r \in \mathbb{N}$ und $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ wie in Definition 2.3. Wir betrachten eine Linearkombination der ersten r Zeilen von A, die 0 ist. Seien also $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ so, dass für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\sum_{l=1}^{r} \lambda_l \cdot A[l, k] = 0. \tag{3.1}$$

Wir zeigen jetzt, dass für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt: $\lambda_i = 0$. Wir zeigen das mit Induktion nach i. Betrachten wir die Gleichung 3.1 für $k := j_1$. Dann gilt

$$\sum_{l=1}^{r} \lambda_l \cdot A[l, j_1] = 0.$$

Für $l \geq 2$ gilt $A[l, j_1] = 0$, da Bedingung (3) von Definition 2.3 für $i := l$ und $k := j_1$ ergibt, dass $A(l, j_1) = 0$. Also gilt $\lambda_1 \cdot A[1, j_1] = 0$. Da $A[1, j_1] \neq 0$, gilt $\lambda_1 = 0$.

Sei nun $i \in \{1, \ldots, r\}$. Wir nehmen an, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{i-1} = 0$. Wir betrachten die Gleichung 3.1 für $k := j_i$. Es gilt dann

$$\sum_{l=1}^{r} \lambda_l \cdot A[l, j_i] = 0,$$

also

$$\lambda_i \cdot A[i, j_i] + \sum_{l=i+1}^{r} \lambda_l \cdot A[l, j_i] = 0.$$

Für $l > i$ ergibt Bedingung (3) von Definition 2.3 (mit $i' := l$ und $k' := j_i$), dass $A[l, j_i] = 0$ gilt. Also gilt $\lambda_i \cdot A[i, j_i] = 0$. Da $A[i, j_i] \neq 0$, gilt auch $\lambda_i = 0$.

Es ist also $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Also sind die ersten r Zeilen von A linear unabhängig. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 3.25.

(1) Bestimmen Sie eine Basis von $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.
(2) Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume!
   (a) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$.
   (b) $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix})$.
   (c) $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix})$.

5. Die Zeilenstaffelnormalform

Wir studieren folgendes Problem: Gegeben sind zwei Unterräume U, V von $\mathbb{R}^n$. Beide Unterräume sind explizit gegeben, das heißt, durch $u_1, \ldots, u_l$ und $v_1, \ldots, v_m$ so, dass $U = L(u_1, \ldots, u_l)$ und $V = L(v_1, \ldots, v_m)$. Wir fragen uns nun, ob $U = V$.

DEFINITION 3.26 (Zeilenstaffelnormalform). Sei A eine $m \times n$-Matrix. A ist in *Zeilenstaffelnormalform*, wenn es $r \in \mathbb{N}_0$ und $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass

(1) $j_r > j_{r-1} > \cdots > j_1$.
(2) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt: $A(i, j_i) = 1$.
(3) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ und für alle $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt: Wenn $k \neq i$, dann gilt $A(k, j_i) = 0$.
(4) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ und für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $k < j_i$ gilt: $A(i, k) = 0$.
(5) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i > r$ und für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt: $A(i, k) = 0$.

ALGORITHMUS 3.27 (Zeilenstaffelnormalform).
Eingabe: Eine $m \times n$-Matrix A.
Ausgabe: Eine $m \times n$-Matrix B, sodass B in Zeilenstaffelnormalform ist, und $Z(A) = Z(B)$.

$B \leftarrow A$
zeile $\leftarrow 1$
spalte $\leftarrow 1$
while *zeile* $\leq m$
    do (* Die ersten *spalte* $- 1$ Spalten sind in Zeilenstaffelnormalform *)
        while *spalte* $\leq n$ und $B(i, \mathit{spalte}) = 0$ für alle i mit $\mathit{zeile} \leq i \leq m$
            do *spalte* $\leftarrow$ *spalte* $+ 1$
        if *spalte* $\leq n$
           then *gewaehlteZeile* $\leftarrow$ ein i, sodass $\mathit{zeile} \leq i \leq m$ und $B(i, \mathit{spalte}) \neq 0$
                if *gewaehlteZeile* $\neq$ *zeile*
                   then Vertausche die *gewaehlteZeile*-te mit der *zeile*-ten Zeile von B
                Multipliziere die *zeile*-te Zeile von B mit $\frac{1}{B(\mathit{zeile}, \mathit{spalte})}$
                $i \leftarrow 1$
                while $i \leq m$

```
                    do if i ≠ zeile
                        then Addiere passendes Vielfaches der zeile-ten
    Zeile zur i-ten Zeile von B, sodass B(i, spalte) = 0
                        i ← i + 1
        zeile ← zeile + 1
        spalte ← spalte + 1
return B
```

Wir geben einige Beispiele für das Berechnen einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform, die den gleichen Zeilenraum wie die Ausgangsmatrix besitzt.

AUFGABE 3.28.

In[29]:= **<< RowRed4.m**

In[30]:= **MatrixForm [A1]**

Out[30]=
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

In[31]:= **RowEchelonNormalForm [A1]**

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 4 & -2 \\ 0 & 17 & -34 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[31]= $$\left\{\left\{\left\{\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{9}{8}, 0\right\}, \left\{0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{4}, -\frac{5}{16}, -\frac{1}{16}, 0\right\}, \left\{-\frac{5}{2}, \frac{9}{8}, \frac{29}{8}, 1\right\}\right\}, \left\{\{1, 0, -2, 0, -1\}, \{0, 1, -2, 0, 0\}, \left\{0, 0, 0, 1, -\frac{1}{2}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\right\}\right\}$$

AUFGABE 3.29.

In[32]:= **<< RowRed4.m**

In[33]:= **MatrixForm[A2]**

Out[33]= $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[34]:= **RowEchelonNormalForm[A2]**

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -20 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -13 & -20 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{13} & -\frac{18}{13} \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[34]= $$\left\{\left\{\left\{-\frac{2}{13}, 0, \frac{5}{13}\right\}, \left\{\frac{3}{13}, 0, -\frac{1}{13}\right\}, \{-2, 1, 0\}\right\}, \left\{\left\{1, 0, -\frac{9}{13}, -\frac{18}{13}\right\}, \left\{0, 1, \frac{20}{13}, \frac{27}{13}\right\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\}\right\}$$

AUFGABE 3.30.

In[35]:= **<< RowRed4.m**

In[36]:= **MatrixForm[A3]**

Out[36]= $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

In[37]:= **RowEchelonNormalForm[A3]**

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[37]= $\left\{\left\{\left\{-\frac{10}{3}, 0, \frac{7}{3}, -5\right\}, \left\{\frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 1\right\}, \left\{-\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right\}, \left\{\frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{3}, 0\right\}\right\}, \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 0\}\}\right\}$

AUFGABE 3.31.

In[38]:= **<< RowRed4.m**

In[39]:= **MatrixForm[A5]**

Out[39]= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

In[40]:= **RowEchelonNormalForm[A5]**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 14 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -23 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -9 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -23 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -9 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{16}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{5} & \frac{76}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{5} & \frac{76}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{16}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{76}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{5} & \frac{76}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{76}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[40]= $\left\{\left\{\left\{\frac{1}{67}, -\frac{9}{67}, \frac{12}{67}, 0\right\}, \left\{-\frac{10}{67}, \frac{23}{67}, \frac{14}{67}, 0\right\}, \left\{\frac{6}{67}, \frac{13}{67}, \frac{5}{67}, 0\right\}, \{-1, -1, -1, 1\}\right\}, \left\{\left\{1, 2, 0, 0, 0, -\frac{32}{67}, 0\right\}, \left\{0, 0, 1, 0, 0, -\frac{15}{67}, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 1, \frac{76}{67}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}\right\}\right\}$

Der Algorithmus liefert den folgenden Satz.

SATZ 3.32. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann gibt es eine Matrix B in Zeilenstaffelnormalform, sodass $Z(A) = Z(B)$.*

Mathematica hat einen eigenen Befehl zur Berechnung der Zeilenstaffelnormalform, nämlich `RowReduce`.

In[41]:= **MatrixForm[A1]**

Out[41]= $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

```
In[42]:= MatrixForm[RowReduce[A1]]
```

Out[42]= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Der Nullraum einer Matrix

Wir überlegen uns jetzt, wie wir eine Basis eines implizit gegebenen Unterraums des $\mathbb{R}^n$ berechnen.

DEFINITION 3.33 (Skalarprodukt). Seien $v = (v_1, \dots, v_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren das Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ durch

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i.$$

DEFINITION 3.34. Sei M eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir

$$M^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle m, v\rangle = 0 \text{ für alle } m \in M\},$$

genannt “M orthogonal”.

SATZ 3.35. *Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann gilt $N(A) = (Z(A))^\perp$.*

KOROLLAR 3.36. *Sei A eine $l \times n$, und sei B eine $m \times n$-Matrix. Wenn $Z(A) = Z(B)$, dann gilt auch $N(A) = N(B)$.*

Wenn eine Matrix B in Zeilenstaffelnormalform ist, dann kann man ihren Nullraum $N(B)$ besonders schnell berechnen.

SATZ 3.37. *Sei B eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstaffelnormalform, seien $j_1 < j_2 < \cdots < j_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ wie in Definition 3.26. Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-r} \in \{1, 2, \dots, n\}$ so, dass $\{i_1, \dots, i_{n-r}\} \cup \{j_1, \dots, j_r\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Sei C eine $(n - r) \times n$-Matrix, die so definiert ist: Für alle $k \in \{1, 2, \dots, n - r\}$ gilt:*

- *$C(k, i_k) = 1$,*
- *für alle $s \in \{1, \dots, r\} : C(k, j_s) = -B(s, i_k)$, und*
- *für alle $l \in \{i_1, i_2, \dots, i_{n-r}\} \setminus \{i_k\} : C(k, l) = 0$.*

Dann steht in den Zeilen von C eine Basis des Nullraumes von B.

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass jede Zeile von C im Nullraum von B liegt. Sei dazu c die k-te Zeile von C. Wir berechnen jetzt $B \cdot c$ (dazu stellen wir uns c als Spaltenvektor vor). Für $t \in \{1, \dots, r\}$ berechnen wir den t-ten Eintrag von $B \cdot c$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
(B \cdot c)[t] &= \sum_{l=1}^{n} B[t, l] \cdot c[l] \\
&= \sum_{l=1}^{n} B[t, l] \cdot C[k, l] \\
&= B[t, i_k] \cdot C[k, i_k] + \sum_{s=1}^{r} B[t, j_s] \cdot C[k, j_s] + \sum_{l \in \{i_1, i_2, \dots, i_{n-r}\} \setminus \{i_k\}} B[t, l] \cdot C[k, l] \\
&= B[t, i_k] \cdot 1 + 1 \cdot C[k, j_t] + 0 \\
&= B[t, i_k] - B[t, i_k] = 0.
\end{aligned}$$

Für $t \in \{r + 1, \dots, m\}$ gilt $(B \cdot c)[t] = \sum_{l=1}^{n} 0 \cdot c[l] = 0$. Daher gilt $Z(C) \subseteq N(B)$.

Bevor wir die Inklusion $N(B) \subseteq Z(C)$ beweisen, zeigen wir als Vorbereitung folgende Aussage:

> Wenn
> $$x = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$
> und
> $$y = (y(1), y(2), \dots, y(n))$$
> Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind, sodass $B \cdot x = 0$, und $B \cdot y = 0$ und $x(i_l) = y(i_l)$ für alle $l \in \{1, 2, \dots, n - r\}$ gilt, so gilt $x = y$.

Das begründen wir so: wir zeigen, dass x und y auch an den Stellen $j_1, \dots, j_r$ übereinstimmen. Sei also $k \in \{1, \dots, r\}$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} B(k, j) \cdot x(j) = 0.$$

Das bedeutet

$$B(k, j_k) \cdot x(j_k) + \sum_{s \in \{1, \dots, r\} \setminus \{k\}} B(k, j_s) \cdot x(j_s) = - \sum_{l=1}^{n-r} B(k, i_l) \cdot x(i_l),$$

also

$$x(j_k) = - \sum_{l=1}^{n-r} B(k, i_l) \cdot x(i_l).$$

Ebenso errechnen wir $y(j_k) = - \sum_{l=1}^{n-r} B(k, i_l) \cdot y(i_l)$. Also gilt $x = y$.

Nach dieser Vorbereitung zeigen wir $N(B) \subseteq Z(C)$. Sei dazu $x \in N(B)$. Wir setzen

$$\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(n - r)) := (x(i_1), \dots, x(i_{n-r}))$$

und

$$y := C^T \cdot \alpha.$$

Da $B \cdot C^T = 0$, gilt $B \cdot y = 0$. Wir zeigen nun, dass für alle $l \in \{1, 2, \dots, n - r\}$ gilt:

$$y(i_l) = x(i_l).$$

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} y(i_l) &= (C^T \cdot \alpha)[i_l] \\ &= \sum_{k=1}^{n-r} C(k, i_l) \cdot \alpha(k) \\ &= C(l, i_l) \cdot \alpha(l) \\ &= 1 \cdot x(i_l). \end{aligned}$$

Aus unserer vorbereitenden Bemerkung erhalten wir

$$x = y.$$

Der Vektor y liegt offensichtlich im Zeilenraum von C, also gilt $x \in Z(C)$.

Wir wissen also jetzt, dass die lineare Hülle der Zeilenvektoren von C genau $N(B)$ ist. Jetzt zeigen wir noch, dass die Zeilen von C linear unabhängig sind. Sei $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(n - r))$ so, dass $C^T \cdot \alpha = 0$. Sei $l \in \{1, 2, \dots, n - r\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (C^T \cdot \alpha)[i_l] \\ &= \sum_{k=1}^{n-r} C(k, i_l) \cdot \alpha(k) \\ &= C(l, i_l) \cdot \alpha(l) \\ &= 1 \cdot \alpha(l). \end{aligned}$$

Daher gilt $\alpha(l) = 0$. ■

Wir haben also folgenden Satz gezeigt:

SATZ 3.38. *Sei B eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstaffelnormalform, und sei r die Anzahl der Zeilen von B, die nicht* 0 *sind. Dann hat $N(B)$ eine Basis, die genau $n - r$ Vektoren enthält.*

Wir fassen den konstruktiven Teil des Beweises des Satzes 3.37 nocheinmal zusammen.

ALGORITHMUS 3.39 (Nullraum einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform).
Eingabe: Eine $m \times n$-Matrix B in Zeilenstaffelnormalform.
Ausgabe: Eine Matrix C, deren Zeilen eine Basis des Nullraumes von B sind.

$r \leftarrow$ Anzahl der Zeilen $\neq 0$ von B
for $s = 1$ **to** r
    do $J[s] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid B[s, k] \neq 0\}$

$C \leftarrow$ die $(n-r) \times n$-Matrix mit allen Einträgen 0
freieVariablen $\leftarrow$ aufsteigend geordnete Liste der Elemente von $\{1, \ldots, n\} \setminus \{J[s] \mid s \in \{1, \ldots, r\}\}$
for $k = 1$ **to** $n - r$
  do $i \leftarrow$ *freieVariablen*$[k]$
    (* die i-te Variable wird frei gewählt *)
    $C[k, i] \leftarrow 1$
    for $s = 1$ **to** r
      do $C[k, J[s]] \leftarrow -B[s, i]$

Als Beispiel berechnen wir den Nullraum von zwei Matrizen in Zeilenstaffelnormalform.

AUFGABE 3.40. *In[43]:=* **(* 1. Beispiel *)**

In[44]:= **<< RowRed5.m**

In[45]:= **B = RowReduce [A6];**

Out[45]= MatrixForm [B]

In[46]:= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Out[46]= CC = NullSpaceViaREF2[B];

MatrixForm [CC]

In[47]:= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

In[48]:=

(* 2. Beispiel *)

In[49]:= **B = RowReduce [A5];**

Out[49]= MatrixForm [B]

In[50]:= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{76}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

In[51]:= **CC = NullSpaceViaREF2 [B];**

Out[51]= MatrixForm [CC]

$$\begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

In[52]:= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{32}{67} & 0 & \frac{15}{67} & 0 & -\frac{76}{67} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

ÜBUNGSAUFGABEN 3.41.

(1) Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum U des $\mathbb{R}^4$, der durch

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$$

gegeben ist.

Jede Matrix hat den gleichen Zeilenraum wie eine Matrix in Zeilenstaffelnormalform.

SATZ 3.42. *Sei $m \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times (m+1)$-Matrix. Dann enthält der Nullraum von A einen von 0 verschiedenen Vektor.*

7. Die Dimension eines Unterraumes

Wir werden jetzt sehen, dass alle Basen eines Unterraums von $\mathbb{R}^n$ gleich viele Elemente haben.

SATZ 3.43. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$, sei $m \in \mathbb{N}_0$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis des Unterraums T von $\mathbb{R}^n$, und sei $C = (c_1, \ldots, c_k)$ eine Folge von Vektoren in T mit $k > m$. Dann ist $(c_1, \ldots, c_k)$ linear abhängig.*

Beweisskizze. Wir zeigen, daß bereits $C' := (c_1, \ldots, c_{m+1})$ linear abhängig ist. (Daraus folgt sofort die lineare Abhängigkeit von C, denn wir können $\lambda_{m+2} = \ldots = \lambda_k = 0$ setzen.) Sei $\overline{C}$ die $n \times (m+1)$-Matrix $(c_1, \ldots, c_{m+1})$, das heißt, die Matrix, deren Spaltenvektoren genau die Vektoren $c_1, \ldots, c_{m+1}$ sind.

Zu zeigen ist, daß $\overline{C} \cdot x = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ besitzt.

Wir finden eine $m \times (m+1)$-Matrix Y mit $\overline{B} \cdot Y = \overline{C}$. Es gibt nun einen Vektor $x \neq 0$ mit $Y \cdot x = 0$, also $\overline{C} \cdot x = \overline{B} \cdot Y \cdot x = \overline{B} \cdot 0 = 0$. Somit sind die Spaltenvektoren von $\overline{C}$ linear abhängig. ■

KOROLLAR 3.44. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Jede Folge von mehr als n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist linear abhängig.*

Beweis. $\mathbb{R}^n$ hat die sogenannte *kanonische* Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Satz 3.43 folgt, dass eine Folge aus mehr als n Vektoren linear abhängig ist. ■

SATZ 3.45. *Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann hat T eine Basis.*

Beweisskizze. Wir beginnen mit $t_1 \neq 0$, $t_1 \in T$. Falls $L(t_1) \neq T$ gilt, existiert $t_2 \neq 0$, sodaß (t_1, t_2) linear unabhängig ist. Solange $L(t_1, \ldots, t_k) \neq T$ ist, können wir wegen Satz 3.16 ein $t_{k+1} \in T\setminus\{0\}$ finden, sodaß $(t_1, \ldots, t_{k+1})$ linear unabhängig ist. Da im $\mathbb{R}^n$ eine Folge von $n + 1$ Vektoren immer linear abhängig ist, muss irgendwann $L(t_1, \ldots, t_m) = T$ eintreten. Dann ist $(t_1, \ldots, t_m)$ Basis von T. ■

KOROLLAR 3.46. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und linear unabhängige Vektoren $t_1, \ldots, t_m \in T$, sodass $L(t_1, \ldots, t_m) = T$.*

Jeder Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist also die lineare Hülle endlich vieler Vektoren.

LEMMA 3.47. *Seien B und C Basen von T mit $|B| = k$. Dann gilt $|C| \leq k$.*

Da wir diesem Lemma die Rollen von B und C aber auch vertauschen können, folgt:

SATZ 3.48. *Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei T ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Dann haben alle Basen von T gleich viele Elemente.*

Der Satz 3.48 ermöglicht folgende Definition:

DEFINITION 3.49 (Dimension). Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann ist die *Dimension* von T die Anzahl der Elemente einer Basis von T. Wir kürzen die Dimension von T mit $\dim(T)$ ab.

SATZ 3.50. *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}_0$, sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit Dimension k, und sei S ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $S \subseteq T$ und $\dim(S) = k$. Dann gilt $S = T$.*

Beweis. Sei $(s_1, \ldots, s_k)$ eine Basis von S. Falls $L(s_1, \ldots, s_k) = T$, so gilt $S = T$. Wenn es ein $t \in T \setminus L(s_1, \ldots, s_k)$ gibt, so ist nach Satz 3.16 die Folge $(s_1, \ldots, s_k, t)$ linear unabhängig. Dann haben wir $k + 1$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum mit einer k-elementigen Basis gefunden. Das widerspricht Satz 3.43. ■

SATZ 3.51. *Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, und sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sei*

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

eine linear unabhängige Folge von Vektoren aus M. Wir nehmen an, dass B so ist, dass es kein $m \in M$ gibt, sodass $(b_1, b_2, \ldots, b_k, m)$ ebenfalls linear unabhängig ist. (Wir fordern also, dass B eine maximale linear unabhängige Folge aus M ist.) Dann ist B eine Basis für $L(M)$.

*Beweis.*Zu zeigen ist, dass $L(B) = L(M)$. $L(B) \subseteq L(M)$ gilt, da $B \subseteq M$. Wir zeigen nun $L(M) \subseteq L(B)$. Es genügt zu zeigen: $M \subseteq L(B)$. Sei dazu $m \in M$. Da $(b_1, b_2, \ldots, b_k, m)$ linear abhängig ist, gilt wegen Satz 3.16, dass m in der linearen Hülle von $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ liegt. ■

KOROLLAR 3.52. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$, und sei $M = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ eine Folge von Vektoren $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es $r \in \{0, \dots, k\}$ und $i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, \dots, k\}$, sodass folgendes gilt: $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, und $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r})$ ist eine Basis von $L(M)$.*

KOROLLAR 3.53. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, und sei $M = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ eine Folge von Vektoren $\mathbb{R}^n$. Dann gilt* $\dim(L(M)) \leq k$.

8. Der Rang einer Matrix

DEFINITION 3.54. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Der *Rang* von A ist die Dimension des Zeilenraums von A.

Man berechnet den Rang, indem man aus der Matrix A eine Matrix B in Zeilenstaffelform erzeugt, die den gleichen Zeilenraum wie A hat. Die Zeilen von B, die nicht 0 sind, sind stets linear unabhängig. Sie bilden also eine Basis von $Z(B) = Z(A)$.

ALGORITHMUS 3.55 (Rang einer Matrix).
Eingabe: eine $m \times n$-Matrix A.
Ausgabe: der Rang von A.

Berechne mit Algorithmus 3.21 eine Matrix B in Zeilenstaffelform, sodass $Z(B) = Z(A)$.
return Anzahl der Zeilen von B, die nicht 0 sind.

SATZ 3.56. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei k der Rang von A. Dann hat $N(A)$ die Dimension $n - k$.*

Beweis. Sei B eine Matrix in Zeilenstaffelnormalform, sodass $Z(B) = Z(A)$. Wegen Korollar 3.36 hat $B \cdot x = 0$ die gleiche Lösungsmenge wie $A \cdot x = 0$. Sei r die Anzahl der Zeilen von B, die nicht 0 sind. Diese Zeilen sind nach Satz 3.24 linear unabhängig, und bilden somit eine Basis von $Z(B)$. Da alle Basen eines Unterraums gleich viele Vektoren enthalten, gilt $r = k$. Nach Satz 3.37 hat $N(B)$ die Dimension $n - k$. Da $N(B) = N(A)$, hat auch $N(A)$ die Dimension $n - k$. ■

9. Die Eindeutigkeit der Zeilenstaffelnormalform

Die Zeilenstaffelnormalform hat folgende wichtige Eigenschaft:

SATZ 3.57. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und seien B, C zwei $m \times n$-Matrizen in Zeilenstaffelnormalform. Wir nehmen an, dass $Z(B) = Z(C)$. Dann gilt $B = C$.*

Beweis. Wir fixieren $m, n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass für alle $r \in \mathbb{N}_0$ folgendes gilt:

> Für alle $a \in \mathbb{N}$ und für alle $a \times n$-Matrizen B, C in Zeilenstaffelnormalform mit $\dim(Z(B)) = r$ und $Z(B) = Z(C)$ gilt $B = C$.

Diese Aussage beweisen wir durch Induktion nach r. Für $r = 0$ gilt $Z(B) = Z(C) = \{\vec{0}\}$, also $B = C = 0$.

Sei nun $r \geq 1$, sei $a \in \mathbb{N}$, und seien B, C zwei $a{\times}n$-Matrizen in Zeilenstaffelnormalform mit $Z(B) = Z(C)$ und $\dim(Z(B)) = r$. Dann haben sowohl B also auch C genau r Zeilen, die nicht 0 sind.

Für einen Unterraum U von $\mathbb{R}^n$ und für $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ definieren wir eine Teilmenge des $\mathbb{R}^l$ durch

$$U^{(l)} := \{(u_1, \ldots, u_l) \in \mathbb{R}^l \,|\, \text{es gibt } u_{l+1}, \ldots, u_n \in \mathbb{R}, \text{ sodass } (u_1, \ldots, u_n) \in U\}.$$

$U^{(n)}$ definieren wir durch $U^{(n)} := U$. Außerdem definieren wir für jede $m \times n$-Matrix A und für jedes $l \in \{1, \ldots, n\}$

$$A_l := \text{ die } m \times l\text{-Matrix, die aus den ersten } l \text{ Spalten von } A \text{ besteht.}$$

Dann gilt:

$$\text{Für alle } l \in \{1, \ldots, n\} \,:\, Z(B_l) = Z(B)^{(l)}.$$

Seien $j_1, \ldots, j_r$ wie in der Definition der Zeilenstaffelnormalform. Dann gilt $\dim(Z(B)^{(j_r)}) = r$, da die ersten r Zeilen von B_{j_r} eine Basis von $Z(B)^{(j_r)}$ sind. Ebenso gilt $\dim(Z(B)^{(j_r-1)}) = r-1$, da die ersten $r-1$ Zeilen von B_{j_r-1} eine Basis von $Z(B)^{(j_r-1)}$ sind. Daher gilt: j_r ist jenes $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sodass $\dim(Z(B)^{(l)}) = r$ und $\dim(Z(B)^{(l-1)}) = r-1$.

Die Matrix C hat ebenfalls genau r Zeilen, die nicht 0 sind. Seien $j'_1, \ldots, j'_r$ wie in der Definition der Zeilenstaffelnormalform. Wie oben gilt, dass j'_r jenes $l' \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ist , sodass $\dim(Z(C)^{(l')}) = r$ und $\dim(Z(C)^{(l'-1)}) = r-1$. Da $Z(B) = Z(C)$, gilt also $j_r = j'_r$.

Die ersten $r-1$ Zeilen der Matrix B sind in Zeilenstaffelnormalform. Sie bilden eine Basis des Raums

$$U = \{(v_1, \ldots, v_n) \in Z(B) \,|\, v_{i_r} = 0\}.$$

Ebenso sind die ersten $r-1$ Zeilen der Matrix C in Zeilenstaffelnormalform. Sie sind eine Basis von

$$V = \{(v_1, \ldots, v_n) \in Z(C) \,|\, v_{i_r} = 0\}.$$

Sei B' die Matrix, die aus den ersten $r-1$ Zeilen von B besteht, und sei C' die Matrix, die aus den ersten $r-1$ Zeilen von C besteht. Nach Voraussetzung gilt $Z(B) = Z(C)$. Daher gilt auch $U = V$. Das heißt aber, dass $Z(B') = Z(C')$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $B' = C'$.

Es bleibt zu zeigen, dass B und C die gleiche r-te Zeile haben. Sei b die r-te Zeile von B und c die r-te Zeile von C. Der Eintrag an der j_r-ten Stelle von $b - c$ ist $1 - 1 = 0$; auch alle Einträge von $b - c$ vor der j_r-ten Stelle sind gleich 0. Da $b, c \in Z(B)$, gilt $b - c \in Z(B)$. Seien $b_1, \ldots, b_r$ die ersten r Zeilen von B. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ so, dass $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot b_k = b - c$. Wenn wir für $i \in \{1, \ldots, r\}$ den j_i-ten Eintrag betrachten, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot B(k, j_i) = 0.$$

Da B in Zeilenstaffelnormalform ist, ist nur der i-te Summand dieser Summe ungleich 0. Wir erhalten also $\lambda_i = 0$. Folglich sind alle $\lambda_i = 0$, also $b - c = 0$. Also sind auch die r-te Zeile von B und C gleich. ■

Dieser Satz hat folgende Anwendung:

ALGORITHMUS 3.58 (Gleichheit von Unterräumen).
Eingabe: $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und $w_1, \ldots, w_l \in \mathbb{R}^n$.
Ausgabe: **true**, falls $L(v_1, \ldots, v_k) = L(w_1, \ldots, w_l)$, **false** sonst.

1 $m \leftarrow \max(k, l)$
2 $\tilde{V} \leftarrow$ die $m \times n$-Matrix, deren erste k Zeilen die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sind, und deren restliche Zeilen 0 sind
3 $\tilde{W} \leftarrow$ die $m \times n$-Matrix, deren erste l Zeilen die Vektoren $w_1, \ldots, w_l$ sind, und deren restliche Zeilen 0 sind
4 Berechne eine Matrix $\tilde{V}'$ in Zeilenstaffelnormalform, sodass $Z(\tilde{V}') = Z(\tilde{V})$
5 Berechne eine Matrix $\tilde{W}'$ in Zeilenstaffelnormalform, sodass $Z(\tilde{W}') = Z(\tilde{W})$
6 **return true**, falls $\tilde{V}' = \tilde{W}'$, und **false** sonst.

10. Die Lösungsmenge inhomogener linearer Gleichungssysteme

DEFINITION 3.59. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ heißt *homogen*, wenn $b = 0$, und *inhomogen*, wenn $b \neq 0$.

DEFINITION 3.60. Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die *lineare Mannigfaltigkeit* $x_0 + T$ definiert durch:

$$x_0 + T := \{x_0 + t \mid t \in T\}.$$

Die lineare Mannigfaltigkeit $x_0 + T$ ist also der um den Vektor x_0 verschobene Unterraum T. Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme sind stets leer oder lineare Mannigfaltigkeiten.

SATZ 3.61. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei x_0 eine Lösung des Systems $A \cdot x = b$. Sei L die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ und $N(A)$ der Nullraum von A. Dann gilt: $L = x_0 + N(A)$.*

AUFGABE 3.62. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$.

Wir lösen dieses Beispiel mit Mathematica. Mathematica bietet dazu die Funktionen `NullSpace` und `LinearSolve`.

```
In[53]:= A = {{3, 1, 2, -5}, {0, 1, -3, 8}};

In[54]:= b = {4, 1};

In[55]:= NullSpace[A]
Out[55]= {{13, -24, 0, 3}, {-5, 9, 3, 0}}

In[56]:= LinearSolve[A, b]
Out[56]= {1, 1, 0, 0}
```

Die Lösungsmenge ist damit gegeben durch

$$L = \{(1, 1, 0, 0) + s \cdot (13, -24, 0, 3) + t \cdot (-5, 9, 3, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir überlegen uns jetzt noch, wie wir algorithmisch bestimmen können, ob ein lineares Gleichungssystem eine Lösung hat. Sei dazu $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystems. Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A\ b)$, also jene Matrix, die wir erhalten, wenn wir A um eine Spalte vergrößern und in diese Spalte b schreiben.

SATZ 3.63. *Seien $A \cdot x = b$ und $C \cdot x = d$ zwei lineare Gleichungssysteme, und sei $E = (A\ b)$ und $F = (C\ d)$. Wenn E und F den gleichen Zeilenraum haben, dann haben die beiden Gleichungssysteme die gleiche Lösungsmenge.*

SATZ 3.64. *Sei A eine $m \times n$-Matrix, sei $b \in \mathbb{R}^m$, sei E die Matrix $(A\ b)$, und sei $L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\}$. Dann gilt*

$$L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} \in N(E)\}.$$

SATZ 3.65. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, und sei $E := (A\ b)$. Sei F eine Matrix in Zeilenstaffelform mit $Z(F) = Z(E)$, und seien $j_1 < \ldots < j_r$ wie in Definition 2.3. Wenn $j_r = n + 1$, dann hat das System $A \cdot x = b$ keine Lösung.*

Beweis. Wenn $j_r = n + 1$, dann gilt für alle Elemente $x \in N(F)$, dass $x_{n+1} = 0$ ist. Nach Satz 3.64 hat $A \cdot x = b$ also keine Lösung. ■

Wir bestimmen jetzt alle Lösungen von $A \cdot x = b$ folgendermaßen:

ALGORITHMUS 3.66 (Lineare Gleichungssysteme).
Eingabe: Eine $m \times n$-Matrix A, und $b \in \mathbb{R}^m$.
Ausgabe: "keine Lösung", falls es kein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = b$ gibt. Sonst geben wir einen Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine $t \times n$-Matrix D aus, sodass die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ gleich $x_0 + Z(D)$ ist.

$B \leftarrow$ die erweiterte Matrix $(A\ b)$
$C \leftarrow$ die $m \times (n + 1)$-Matrix in Zeilenstaffelnormalform mit $Z(C) = Z(B)$
$r \leftarrow$ Anzahl der Zeilen $\neq 0$ von B.
for $s = 1$ **to** r
    do $J[s] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid C[s, k] \neq 0\}$

if $J[r] = n + 1$
  then *resultat* $\leftarrow$ *“keine Lösung”*
  else $D \leftarrow$ die $(n - r) \times n$-Matrix mit allen Einträgen 0
    $x_0 \leftarrow$ der Nullvektor im $\mathbb{R}^n$
    $I \leftarrow$ aufsteigend geordnete Liste der Elemente von $\{1, \ldots, n\} \backslash \{J[s] \mid s \in \{1, \ldots, r\}\}$
    for $k = 1$ **to** $n - r$
      do $i \leftarrow I[k]$
        (* die i-te Variable wird frei gewählt *)
        $D[k, i] \leftarrow 1$
        for $s = 1$ **to** r
          do $D[k, J[s]] \leftarrow -C[s, i]$
    for $s = 1$ **to** r
      do $x_0[J[s]] \leftarrow C[s, n + 1]$
    resultat $\leftarrow (x_0, C)$
return *resultat*

Wir berechnen jetzt die Lösung von zwei linearen Gleichungssystemen mit Mathematica, indem wir die Zeilenstaffelnormalform von $(A\ \ b)$ ausrechnen.

AUFGABE 3.67. `In[57]:=` **`<< RowRed6.m`**

`In[58]:=` **`MatrixForm[A1]`**

`Out[58]=`
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

`In[59]:=` **`MatrixForm[b1]`**

`Out[59]=`
$$\begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

`In[60]:=`

`LinSolveViaREF[A1, b1]`

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 4 & -2 & -9 \\ 0 & 17 & -34 & -10 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 & -58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 & -58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[60]= $\left\{\{-2, 1, 0, -1, 0\}, \{\{2, 2, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 0, \frac{1}{2}, 1\}\}\right\}$

Jetzt noch ein System, das keine Lösung hat.

AUFGABE 3.68. *In[61]:=* **<< RowRed6.m**

In[62]:= **MatrixForm [A2]**

Out[62]= $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

In[63]:= **MatrixForm[b2]**

Out[63]= $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

In[64]:=

LinSolveViaREF [A2, b2]

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 10 & 14 & 18 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & -20 & -27 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & -20 & -27 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{13} & -\frac{18}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{13} & -\frac{18}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Out[64]= NOSOLUTION
```

ÜBUNGSAUFGABEN 3.69.

(1) Widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:
Wenn das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eine Lösung hat, so besitzt für jede rechte Seite b das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ zumindest eine Lösung.

11. Koordinaten

SATZ 3.70. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, sei T ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von T und $t \in T$. Dann gibt es genau ein m-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ mit*

$$t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i.$$

Beweis. Ein solches m-Tupel existiert, da $t \in L(b_1, \ldots, b_m)$. Sei nun $\overline{B}$ die $n \times m$-Matrix, in deren Spalten die Vektoren $(b_1, \ldots, b_m)$ stehen. Angenommen, $\alpha = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ und $\beta = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ seien zwei verschiedene Tupel mit $\overline{B} \cdot \alpha = \overline{B} \cdot \beta = t$. Dann gilt $\overline{B} \cdot (\alpha - \beta) = 0$ und $\alpha - \beta \neq 0$. Das ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von der Spalten von $\overline{B}$. ■

Dieses m-Tupel gibt also an, wie wir den Vektor t aus den Basisvektoren zusammenbauen können. Wir nennen dieses Tupel die *Koordinaten* des Vektors t bezüglich der Basis B.

DEFINITION 3.71. Sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ Basis von $T \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $t \in T$, und sei $\overline{B}$ die $n \times m$-Matrix, in deren Spalten die Vektoren $(b_1, \ldots, b_m)$ stehen. Dann heißt das $\alpha = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\overline{B} \cdot \alpha = t$$

das *Koordinatentupel* von t bezüglich der Basis B. Wir schreiben auch $(t)_B = \alpha$.

Das Koordinatentupel $(t)_B$ erfüllt also die Gleichung

$$\overline{B} \cdot (t)_B = t.$$

AUFGABEN 3.72. (1) Sei $B = ((1, 0, 3), (2, 1, 6))$, $T = L(B)$, und $v = (3, 1, 9)$. Offenbar gilt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

woraus $(v)_B = (1, 1)$ folgt.

(2) Sei $T = L((3, 2, 1), (0, 1, 2))$. Für das erste Basiselement gilt offensichtlich

$$(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

weiters ist zum Beispiel

$$(3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 3.73.

(1) Der Vektor v hat bezüglich der Basis $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix})$ der Ebene ε die Koordinaten $(v)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich der Basis $B = (\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ -26 \end{pmatrix})$.

(2) Die Ebene ε hat die Basen

$$A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$$

und

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A!

(3) Die Ebene e ist durch $e = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ gegeben. Sie hat die Basen

$$B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$$

und

$$C = (\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}).$$

Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(v)_B$.

(4) Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$. Zeigen Sie, dass ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b \rangle \end{pmatrix}$ hat; das heißt, zeigen Sie

$$(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b \rangle \end{pmatrix}.$$

Stimmt diese Formel für jede Basis (a, b) des $\mathbb{R}^2$?

(5) Sei $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix})$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E.
   (a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?
   (b) Wie lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich B ?
   (c) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat.

12. Summen und Durchschnitte von Unterräumen

SATZ 3.74. *Seien U, V Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $U \cap V$ auch ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.*

DEFINITION 3.75. Seien U, V Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\}.$$

SATZ 3.76. *Seien U, V Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $U + V$ auch ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.*

Wir überlegen uns nun, wie wir Basen von $U \cap V$ und $U + V$ berechnen können.

ALGORITHMUS 3.77 (Summe explizit gegebener Unterräume).
Eingabe: $u_1, \ldots, u_l \in \mathbb{R}^n$ und $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ so, dass $L(u_1, \ldots, u_l) = U$ und $L(v_1, \ldots, v_l) = V$.
Ausgabe: Eine Basis von $U + V$.

1 Bilde eine $(l+m) \times n$-Matrix W, deren erste l Zeilen die Vektoren $u_1, \ldots, u_l$ sind, und deren $(l+1)$-te bis $(l+m)$-te Zeile die Vektoren $v_1, \ldots, v_l$ sind
2 Bestimme eine Matrix W' in Zeilenstaffelform, sodass $Z(W') = Z(W)$
3 **return** die Zeilen von W', die nicht 0 sind

ALGORITHMUS 3.78 (Durchschnitt implizit gegebener Unterräume).
Eingabe: Eine $r \times n$-Matrix A und eine $s \times n$-Matrix B, sodass $N(A) = U$ und $N(B) = V$.
Ausgabe: Eine Basis von $U \cap V$.

1 Bilde die $(r+s) \times n$-Matrix C, deren erste r Zeilen die Matrix A und deren letzte s Zeilen die Matrix B sind
2 Bestimme eine Basis X für $N(C)$
3 **return** X

Um die Summe zweier implizit gegebener Unterräume zu berechnen, können wir uns zuerst von beiden Unterräumen mit den Algorithmen 3.27 und 3.39 eine Basis ausrechnen, und dann Algorithmus 3.77 verwenden.

AUFGABE 3.79. Bestimmen Sie eine Basis des Raums $U + V$, wobei

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

und

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Lösung: Wir berechnen Matrizen C, D, in deren Zeilen Basen von U bzw. V stehen.

```
In[65]:= A = {{4, -3, 0, 1}, {2, -2, 1, 0}}
Out[65]= {{4, -3, 0, 1}, {2, -2, 1, 0}}
```

```
In[66]:= B = {{2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}
Out[66]= {{2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}

In[67]:= CC = NullSpace[A]
Out[67]= {{-1, -1, 0, 1}, {3, 4, 2, 0}}

In[68]:= DD = NullSpace[B]
Out[68]= {{-2, 3, 0, 13}, {3, 2, 13, 0}}
```

Jetzt bestimmen wir eine Matrix E, deren Zeilenraum der Raum $U + V$ ist.

```
In[69]:= EE = Join[CC, DD];

In[70]:= MatrixForm[EE]
```

$$\text{Out[70]=} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 13 \\ 3 & 2 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[71]:= FF = RowReduce[EE];

In[72]:= MatrixForm[FF]
```

$$\text{Out[72]=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$((1, 0, 0, -16/5), (0, 1, 0, 11/5), (0, 0, 1, 2/5))$$

eine Basis von $U + V$.

Nun wollen wir den Durchschnitt zweier parametrisiert gegebener Unterräume berechnen.

SATZ 3.80. *Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt* $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$.

Beweis. Sei $(u_1, \ldots, u_l)$ eine Basis von U. $U^\perp$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\tilde{U} \cdot x = 0$, wobei $\tilde{U}$ die $l \times n$-Matrix ist, deren Zeilenvektoren $u_1, \ldots, u_l$ sind. Der Rang von U ist l, daher ist die Dimension von $U^\perp$ nach Satz 3.56 gleich $n - l$. ■

SATZ 3.81. *Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt* $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\supseteq$. Sei $u \in U$. Um zu zeigen, dass $u \in (U^\perp)^\perp$ liegt, ist zu zeigen, dass $\langle v, u \rangle = 0$ für alle $v \in U^\perp$. Sei $v \in U^\perp$. Da $v \in U^\perp$, gilt $\langle u, v \rangle = 0$. Also gilt $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Sei l die Dimension von U. Es gilt $\dim((U^\perp)^\perp) = n - \dim(U^\perp) = n - (n - l) = l$. Wegen Satz 3.50 gilt also $U = (U^\perp)^\perp$. ■

SATZ 3.82. *Sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei C eine $l \times n$-Matrix, in deren Zeilen eine Basis für den Nullraum von A steht. Dann gilt*

$$N(C) = Z(A).$$

Der Nullraum von C ist also der Zeilenraum von A.

Beweis. Nach Satz 3.35 gilt $(Z(A))^{\perp} = N(A)$. Wegen $N(A) = Z(C)$ folgt $(Z(A))^{\perp} = Z(C)$. Damit gilt $N(C) = (Z(C))^{\perp} = ((Z(A))^{\perp})^{\perp}$. Mit Satz 3.81 folgt $N(C) = Z(A)$. ■

Das führt zu folgendem Algorithmus:

ALGORITHMUS 3.83 (Implizitisieren eines Unterraums).
Eingabe: Eine $m \times n$-Matrix A.
Ausgabe: Eine $l \times n$-Matrix C, sodass $N(C) = Z(A)$.

1 $C \leftarrow$ eine Matrix, in deren Zeilen eine Basis von $N(A)$ steht
2 **return** C

ALGORITHMUS 3.84 (Durchschnitt von explizit gegebenen Unterräumen).
Eingabe: $u_1, \ldots, u_l \in \mathbb{R}^n$ und $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ so, dass $L(u_1, \ldots, u_l) = U$ und $L(v_1, \ldots, v_l) = V$.
Ausgabe: Eine Basis von $U \cap V$.

1 Bestimme mit Algorithmus 3.83 eine Matrix C_1, sodass $N(C_1) = U$
2 Bestimme mit Algorithmus 3.83 eine Matrix C_2, sodass $N(C_2) = U$
3 Verwende Algorithmus 3.78, um eine Basis von $N(C_1) \cap N(C_2)$ auszurechnen

Wir verwenden diesen Algorithmus, um folgendes Beispiel zu lösen.

AUFGABE 3.85. Sei $U = L((-1, -2, -2, -2), (1, 4, 6, 8))$, und $V = L((1, 0, 3, -2), (-1, 2, 1, 8))$. Berechnen Sie eine Basis von $U \cap V$.

Lösung:

```
In[73]:= CfuerU1 = NullSpace[{{-1, -2, -2, -2}, {1, 4, 6, 8}}]
Out[73]= {{4, -3, 0, 1}, {2, -2, 1, 0}}

In[74]:= CfuerU2 = NullSpace[{{1, 0, 3, -2}, {-1, 2, 1, 8}}]
Out[74]= {{2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}

In[75]:= CfuerU1geschnittenU2 = Join[CfuerU1, CfuerU2]
Out[75]= {{4, -3, 0, 1}, {2, -2, 1, 0}, {2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}

In[76]:= BasisFuerU1geschnittenU2 = NullSpace[CfuerU1geschnittenU2]
Out[76]= {{0, 1, 2, 3}}
```

Somit ist $((0, 1, 2, 3))$ eine Basis von $U \cap V$.

Zum Schneiden parametrisiert gegebener linearer Mannigfaltigkeiten hilft folgender Algorithmus.

ALGORITHMUS 3.86 (Implizitisieren einer linearen Mannigfaltigkeit).
Eingabe: Eine $m \times n$-Matrix A, und $b \in \mathbb{R}^n$.
Ausgabe: Eine $l \times n$-Matrix C und $d \in \mathbb{R}^l$, sodass $b + Z(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C \cdot x = d\}$.

```
C ← eine Matrix, in deren Zeilen eine Basis von N(A) steht
d ← C · b
return (C, d)
```