KAPITEL 8

Der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen

1. Faktorräume

DEFINITION 8.1. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Unterraum von V, und sei $w \in V$. Dann definieren wir

$$w + U := \{w + u \mid u \in U\}$$

und

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\},$$

genannt den *Faktorraum* von V nach U.

DEFINITION 8.2. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Unterraum von V. Dann definieren wir $\oplus$ und $*$ durch

$$(v + U) \oplus (w + U) := (v + w) + U$$

und

$$\alpha * (v + U) := (\alpha v) + U$$

für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in K$.

Wir überlegen uns, dass $\oplus$ und $*$ wohldefiniert sind, das heißt, dass die Relation $\{\big((v + U, w + U), (v + w) + U\big) \mid v, w \in V\}$, die ja eine Teilmenge von $(V/U \times V/U) \times V/U$ ist, eine Funktion von $V/U \times V/U$ nach V/U ist.

SATZ 8.3. *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Unterraum von V. Dann ist $\langle V/U, \oplus, \ominus, 0 + U, * \rangle$ ein Vektorraum über K.*

SATZ 8.4. *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dimension n, und sei U ein Unterraum von V mit Basis $(u_1, \ldots, u_m)$. Dann gibt es $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass $(u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist und $(v_{m+1} + U, \ldots, v_n + U)$ eine Basis von V/U ist.*

Beweisskizze. Wie im Beweis von Satz 3.45 lässt sich $(u_1, \ldots, u_m)$ zu einer Folge von n linear unabhängigen Vektoren in V erweitern, die ganz V aufspannen. Somit gibt es $n - m$ Vektoren $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass $B := (u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.

[0]Unterlagen zur Vorlesung Algebra von Erhard Aichinger, Peter Mayr. 22.1.2008.

Als nächstes zeigen wir, dass $L(v_{m+1} + U, \dots, v_n + U) = V/U$ ist. Sei $v + U \in V/U$. Wegen $L(B) = V$, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_{m+1}, \dots, \mu_n \in K$, sodass

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{j=m+1}^{n} \mu_i v_i$$

ist. Also gilt

$$v + U = \sum_{j=m+1}^{n} \mu_i v_i + U = \sum_{j=m+1}^{n} \mu_i (v_i + U)$$

und daher $v + U \in L(v_{m+1} + U, \dots, v_n + U)$.

Um zu zeigen, dass $(v_{m+1}+U, \dots, v_n+U)$ linear unabhängig ist, wählen wir $\mu_{m+1}, \dots, \mu_n \in K$ so, dass

$$\sum_{j=m+1}^{n} \mu_i (v_i + U) = 0 + U.$$

Dann gilt

$$\sum_{j=m+1}^{n} \mu_i v_i \in U.$$

Weil $(u_1, \dots, u_m)$ eine Basis von U ist, existieren dann $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ so, dass

$$\sum_{j=m+1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i.$$

Somit folgt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i - \sum_{j=m+1}^{n} \mu_i v_i = 0$$

und $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \mu_{m+1} = \dots = \mu_n = 0$, weil B linear unabhängig ist. Also ist $(v_{m+1} + U, \dots, v_n + U)$ linear unabhängig ■

KOROLLAR 8.5. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K, und sei U ein Unterraum von V. Dann gilt*

$$\dim(V) = \dim(V/U) + \dim U.$$

2. Der Homomorphiesatz

DEFINITION 8.6. Seien U und V Vektorräume über K. Eine lineare Abbildung $h : V \to U$ heißt *Isomorphismus*, wenn h bijektiv ist. Der Vektorraum U heißt *isomorph* zu V, wenn es einen Isomorphismus von U nach V gibt.

SATZ 8.7. *Seien U, V Vektorräume über K, und sei U endlichdimensional. Wenn U isomorph zu V ist, dann ist V endlichdimensional, und es gilt* $\dim(U) = \dim(V)$.

Beweisskizze. Sei $h : U \to V$ ein Isomorphismus und sei $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von U. Dann lässt sich zeigen, dass $(h(b_1), \dots, h(b_n))$ eine Basis von V ist. ■

SATZ 8.8. *Seien V und W Vektorräume, und sei h eine lineare Abbildung von V nach W. Dann ist*

$$h(V) = \{h(v) \mid v \in V\}$$

ein Unterraum von W, und

$$\ker(h) := \{v \in V \mid h(v) = 0\}$$

ein Unterraum von V.

Diese beiden Unterräume heißen auch *Image* und *Kern* von h.

SATZ 8.9 (Homomorphiesatz). *Seien V und W Vektorräume, und sei h eine lineare Abbildung von V nach W. Sei $U := \ker(h)$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{cccc} H & : & V/U & \longrightarrow & h(V) \\ & & v + U & \longmapsto & h(v) \end{array}$$

wohldefiniert. Die Abbildung H ist außerdem ein Isomorphismus von V/U nach $h(V)$.

Anstelle "Dann ist die Abbildung [...] wohldefiniert" kann man sagen: "Dann ist die Relation $H = \{(v + U, h(v)) \mid v \in V\}$ eine Funktion von V/U von $h(V)$."

Beweis. Wir zeigen nur die Bijektivität von H. Für die Injektivität seien $v_1, v_2 \in V$, sodass $H(v_1 + U) = H(v_2 + U)$. Das heißt $h(v_1) = h(v_2)$. Aus der Linearität von h folgt dann $h(v_1 - v_2) = 0$. Somit ist $v_1 - v_2 \in U$ und $v_1 + U = v_2 + U$. Also ist H injektiv. Die Surjektivität folgt unmittelbar aus der Definition von H. ■

3. Der Rang einer Matrix und ihre Invertierbarkeit

SATZ 8.10. *Sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei $h_A : K^n \to K^m$, $h_A(v) = A \cdot v$ für alle $v \in K^n$. Dann gilt:*

(1) *Das Image von h, also $h_A(K^n)$, ist genau der Spaltenraum $S(A)$ von A.*
(2) *Der Nullraum $N(A)$ ist genau der Kern $\ker(h_A)$ von h_A.*

SATZ 8.11. *Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann haben Zeilenraum und Spaltenraum die gleiche Dimension.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung h_A. Wegen des Homomorphiesatzes sind $K^n/\ker(h_A)$ und $h_A(K^n)$ isomorph. Also sind $K^n/N(A)$ und $S(A)$ isomorph. Es gilt also $\dim(S(A)) = \dim(K^n/N(A))$. Da $S(A)$ endlichdimensional ist, ist auch $K^n/N(A)$ endlichdimensional. Nach Korollar 8.5 gilt also

$$\dim(K^n) = \dim(K^n/N(A)) + \dim(N(A)),$$

und daher

$$n = \dim(S(A)) + \dim(N(A)).$$

Nach Satz 3.56 gilt $\dim(N(A)) = n - \dim(Z(A))$, also

$$n = \dim(S(A)) + n - \dim(Z(A)),$$

und folglich $\dim(S(A)) = \dim(Z(A))$. ■

SATZ 8.12. *Sei $m \in \mathbb{N}$, sei K ein Körper, und seien $A, B \in K^{m\times m}$ so, dass $A \cdot B = E$. Dann gilt $B \cdot A = E$.*

Beweis. Sei $h_A : K^m \to K^m, x \mapsto A \cdot x$ und $h_B : K^m \to K^m, x \mapsto B \cdot x$. Dann gilt für alle $x \in K^m$

$$x = A \cdot B \cdot x = h_A(h_B(x)).$$

Somit gilt $K^m \subseteq h_A(K^m)$. Daher hat $h_A(K^m)$ Dimension m. Der Kern von h_A hat nach dem Homomorphiesatz daher Dimension 0. Also ist h_A injektiv. Für alle $x \in K^m$ gilt $h_A(h_B(x)) = x$. Daher gilt für alle $y \in K^m$

$$h_A(h_B(h_A(y)) = h_A(y).$$

Da h_A injektiv ist, gilt daher für alle $y \in K^m$ auch $h_B(h_A(y)) = y$. Also gilt für alle $y \in K^m$ auch $B \cdot A \cdot y = y$. Nach Satz 7.15 gilt also $B \cdot A = E$. ■

SATZ 8.13. *Sei A eine $m \times m$-Matrix über K. Äquivalent sind:*

(1) *A ist invertierbar.*
(2) *Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.*
(3) *Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.*
(4) *Der Rang von A ist m.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei B die inverse Matrix von A, und sei x so, dass $A \cdot x = 0$. Dann gilt $B \cdot A \cdot x = 0$, also $x = 0$. Also sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig.

(2)⇒(3): Da $S(A)$ Dimension m hat, hat nach Satz 8.11 auch $Z(A)$ die Dimension m. Wir nehmen an, dass die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind. Dann gibt es eine Zeile, die in der linearen Hülle der anderen Zeilen liegt. Somit gilt wegen Korollar 3.53 $\dim(Z(A)) \le m - 1$, ein Widerspruch.

(3)⇒(4): Da die Zeilenvektoren linear unabhängig sind, sind sie eine m-elementige Basis für $Z(A)$. Also hat $Z(A)$ Dimension m, und folglich ist der Rang von A gleich m.

(4)⇒(1): Da $\dim(Z(A)) = m$, gilt auch $\dim(S(A)) = m$, und folglich $\dim(h_A(K^m)) = m$. Also ist h_A surjektiv. Nach dem Homomorphiesatz gilt $\dim(\ker(h_A)) = 0$, also ist h_A injektiv. Somit ist h_A bijektiv. Sei f die inverse Abbildung, also $f = \{(h_A(x), x) \mid x \in K^m\}$. Diese Abbildung ist linear: seien $u, v \in U$, und $\alpha \in K$. Dann gibt es x, y mit $h_A(x) = u$ und $h_A(y) = v$. Dann gilt $h_A(x + y) = u + v$, und folglich $f(u + v) = x + y = f(u) + f(v)$. Ebenso gilt $h_A(\alpha * x) = \alpha * u$, und daher $f(\alpha * u) = \alpha * x = \alpha * f(u)$. Sei $B := S_f(E, E)$ die Darstellungsmatrix dieser Abbildung. Dann gilt $B \cdot A \cdot x = f(h_A(x)) = x$ für alle $x \in K^m$. Also gilt $B \cdot A = E$. Daher gilt $A \cdot B = B \cdot A = E$. ■

4. Die Determinante einer quadratischen Matrix

4.1. Definition der Determinante. Sei $A = \begin{pmatrix} -z_1- \\ -z_2- \\ \vdots \\ -z_m- \end{pmatrix}$ eine reelle $m \times m$-Matrix. Das *von den Zeilen von A aufgespannte Parallelepiped* ist die Teilmenge

$$\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot z_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0, 1]\}.$$

Wir versuchen jetzt das Volumen dieses Parallelepipeds zu messen, und schreiben $D(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ für dieses Volumen.

Ohne den Begriff Volumen im $\mathbb{R}^m$ definiert zu haben, könnte man vermuten, dass eine Funktion $D : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, die dieses Volumen misst, folgende Eigenschaften hat. Da wir die Eigenschaften auch für Matrizen über anderen Körpern als $\mathbb{R}$ benötigen, formulieren wir diese Eigenschaften für einen Körper K.

(D1) Für alle $z_1, \ldots, z_m, y \in K^m$, $\alpha, \beta \in K$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\begin{aligned} &D(z_1, \ldots, z_{i-1}, \alpha * z_i + \beta * y, z_{i+1}, \ldots, z_m) \\ &\qquad = \alpha D(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_m) + \beta D(z_1, \ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_m). \end{aligned}$$

(D2) Für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ gilt

$$\begin{aligned} &D(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_m) \\ &\qquad = D(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}, z_i + z_j, z_{j+1}, \ldots, z_m). \end{aligned}$$

(D3) Für die kanonische Basis $(e_1, \ldots, e_m)$ des K^n gilt

$$D(e_1, \ldots, e_m) = 1.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 8.14.
In den folgenden Übungsbeispielen nehmen wir an, dass D eine Funktion ist, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt.

(1) Zeigen Sie, dass für alle $z_1, \ldots, z_n \in K^m$ gilt: $D(z_1, z_1, z_3, \ldots, z_m) = 0$.
(2) Zeigen Sie, dass für alle $z_1, \ldots, z_n \in K^m$ gilt: $D(z_1, \alpha \cdot z_1 + z_2, z_3, \ldots, z_m) = D(z_1, z_2, \ldots, z_m)$.
(3) Zeigen Sie, dass für alle $z_1, \ldots, z_n \in K^m$ gilt: $D(z_1, z_2, \ldots, z_m) = -D(z_2, z_1, \ldots, z_m)$.

Eine Funktion mit diesen Eigenschaften erhält man mithilfe der *Determinante*. Sei $f : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ eine bijektive Abbildung. Wir definieren die *Signatur* von f durch

$$\operatorname{sgn}(f) := \prod_{\{(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,m\} \mid i<j\}} \frac{f(i) - f(j)}{i - j}.$$

Die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, m\}$ nach $\{1, \ldots, m\}$ hat $m!$ Elemente; wir kürzen sie mit S_m ab. Für alle $f, g \in S_m$ gilt $\operatorname{sgn}(f) \in \{-1, 1\}$ und $\operatorname{sgn}(f \circ g) = \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{sgn}(g)$, und folglich $\operatorname{sgn}(f^{-1}) = \operatorname{sgn}(f)$.

DEFINITION 8.15. Sei K ein Körper, $m \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{m\times m}$. Dann definieren wir die *Determinante* von A durch

$$\det A := \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{m} A(i, f(i)).$$

SATZ 8.16. *Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times m$-Matrix über K, und sei* $\mathbf{D} : K^m \times K^m \times \cdots \times K^m \to K$ *gegeben durch*

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{D} : & (K^m)^m & \longrightarrow & K \\ & (z_1, z_2, \ldots, z_m) & \longmapsto & \det(\begin{pmatrix} -z_1- \\ -z_2- \\ \vdots \\ -z_m- \end{pmatrix}) \end{array}.$$

Dann erfüllt $\mathbf{D}$ *die Eigenschaften (D1), (D2), und (D3).*

Beweisskizze. (D1) kann man nachrechnen. Für (D2) ist dann ausreichend zu zeigen, dass eine Matrix, in der zwei mal die gleiche Zeile z_j vorkommt, Determinante 0 hat. Auch (D3) kann man nachrechnen. ■

SATZ 8.17. *Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, und seien A und B $m \times m$-Matrizen über K. Dann gilt* $\det(A) = \det(A^T)$ *und* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Beweis. Zuerst zeigen wir $\det(A) = \det(A^T)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{m} A^T(i, f(i)) \\ &= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{m} A(f(i), i) \\ &= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{j=1}^{m} A(j, f^{-1}(j)) \\ &= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f^{-1}) \prod_{j=1}^{m} A(j, f^{-1}(j)) \\ &= \sum_{g\in S_m} \operatorname{sgn}(g) \prod_{j=1}^{m} A(j, g(j)). \end{aligned}$$

Nun beweisen wir die zweite Eigenschaft: Seien $b_1, \ldots, b_m$ die Zeilen der Matrix B. Dann steht in der ersten Zeile des Produkts $A \cdot B$ der Vektor

$$A(1, 1)b_1 + A(1, 2)b_2 + \cdots + A(1, n)b_n.$$

Wenn wir alle m Zeilen des Produkts ausrechnen, dann sehen wir

$$
\begin{aligned}
(8.1)\quad \det(A \cdot B) = \mathbf{D}\big(&A(1,1)b_1 + A(1,2)b_2 + \cdots + A(1,n)b_n,\\
&A(2,1)b_1 + A(2,2)b_2 + \cdots + A(2,n)b_n,\\
&\dots\\
&A(m,1)b_1 + A(m,2)b_2 + \cdots + A(m,n)b_n\big).
\end{aligned}
$$

Wir nutzen nun die Linearität der Funktion $\mathbf{D}$ und erhalten

$$\det(A \cdot B) = \sum_{f:\{1,\dots,m\}\to\{1,\dots,m\}} (\prod_{i=1}^{m} A(i, f(i))) \cdot \mathbf{D}(b_{f(1)}, b_{f(2)}, \dots, b_{f(m)}).$$

Die Determinante ist 0, wenn zwei Zeilen gleich sind. Daher brauchen wir nur über die bijektiven Funktionen zu summieren und erhalten:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{f \in S_m} (\prod_{i=1}^{m} A(i, f(i))) \cdot \mathbf{D}(b_{f(1)}, b_{f(2)}, \dots, b_{f(m)}).$$

Man kann zeigen, dass für eine Bijektion f gilt: $\mathbf{D}(b_{f(1)}, b_{f(2)}, \dots, b_{f(m)}) = \operatorname{sgn}(f) \cdot \mathbf{D}(b_1, b_2, \dots, b_m)$. Also erhalten wir

$$\det(A \cdot B) = \sum_{f \in S_m} (\prod_{i=1}^{m} A(i, f(i))) \cdot \operatorname{sgn}(f) \det(B) = \det(B) \cdot \det(A).$$

■

SATZ 8.18. *Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times m$-Matrix über K. Dann sind äquivalent:*

(1) *Die Zeilen von A sind linear unabhängig.*
(2) $\det(A) \neq 0$.

Beweis. (1)⇒(2): Wenn die Zeilenvektoren von A linear unabhängig sind, dann ist A invertierbar. Daher gilt $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1$. (2)⇒(1): Wir gehen so vor: Wenn z_i in der linearen Hülle von $z_1, \dots, z_{i-1}$ liegt, so kann man die Eigenschaften (D1) und (D2) verwenden, um eine Matrix mit gleicher Determinante und i-ter Zeile $= 0$ zu erzeugen. Wegen der Eigenschaft (D1) ist diese Determinante $= 0$. ■

4.2. Berechnen der Determinante. Es ist besonders leicht, die Determinante einer Matrix in Zeilenstaffelform zu berechnen:

SATZ 8.19. *Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times m$-Matrix über K, sodass für alle i, j mit $i > j$ gilt: $A(i, j) = 0$. Dann gilt*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{m} A(i, i).$$

Wir wissen, dass sich jede Matrix durch Zeilenumformungen in Zeilenstaffelnormalform bringen lässt. Dabei ändert sich die Determinante folgendermaßen:

(1) Wenn wir ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen dazu addieren, bleibt die Determinante unverändert.
(2) Wenn wir eine Zeile mit einem Körperelement vervielfachen, dann vervielfacht sich die Determinante um eben dieses Körperelement.
(3) Beim Vertauschen von zwei Zeilen ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Aus diesen Überlegungen erhält man einen Algorithmus zum Berechnen der Determinante. Wir rechnen einige Beispiele.

In[126]:= **<< RowRed9.m**

In[127]:= **DeterminantenDemo [B]**

$$\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 29 & -16 \\ -3 & -16 & 22 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das − 2 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 2.Zeile.

$$= 1 * 1 * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 25 & -10 \\ -3 & -16 & 22 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das 3 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 3.Zeile.

$$= 1 * 1 * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 25 & -10 \\ 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das 2 fache
der 2. Zeile zum 5 fachen der 3.Zeile.

$$= 1 * \tfrac{1}{5} * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}\right]$$

= 225

Out[127]= 225

In[128]:= **DeterminantenDemo [A]**

$$\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das − 3 fache
der 1. Zeile zum 5 fachen der 2.Zeile.

$= 1 * \frac{1}{5} * det\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Wir addieren das − 4 fache
der 1. Zeile zum 5 fachen der 3.Zeile.

$= \frac{1}{5} * \frac{1}{5} * det\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\right]$

$= -\frac{1}{25}\, det\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}\right]$

= 10

Out[128]= 10

In[129]:= **DeterminantenDemo[B2]**

$\text{Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Wir addieren das − 3 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 2.Zeile.

$= 1 * 1 * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 4 & 3 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Wir addieren das − 4 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 3.Zeile.

$= 1 * 1 * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Wir addieren das − 8 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 4.Zeile.

$= 1 * 1 * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & -16 & 24 & -31 \end{pmatrix}\right]$

Wir addieren das − 1 fache
der 2. Zeile zum 1 fachen der 3.Zeile.

$$= 1 * 1 * det[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 24 & -31 \end{pmatrix}]$$

Wir addieren das − 16 fache
der 2. Zeile zum 5 fachen der 4. Zeile.

$$= 1 * \frac{1}{5} * det[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -72 & -43 \end{pmatrix}]$$

$$= -\frac{1}{5} det[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & -72 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}]$$

= 0

Out[129]= 0

Schließlich berechnen wir noch die Determinante von $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

In[130]:= **<< RowRed9.m**

In[131]:= **M = {{0, 2, 1}, {0, 0, 1}, {1, 2, 3}}**

Out[131]= {{0, 2, 1}, {0, 0, 1}, {1, 2, 3}}

In[132]:= **DeterminantenDemo [M]**

$$\mathrm{Det}[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}]$$

$$= -1\, det[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}]$$

$$= 1\, det[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

= 2

Out[132]= 2

In[133]:= **Det [M]**

Out[133]= 2