KAPITEL 4

Orthogonalität

1. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Wir wiederholen die Definition des Skalarprodukts zweier Vektoren, Definition 1.7.

DEFINITION 4.1. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren:

(1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$ (Skalarprodukt).
(2) $||\vec{a}|| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ (Länge).
(3) Der Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}.$$

(4) Falls $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ist, sagen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *normal aufeinander stehen* und schreiben $\vec{a} \perp \vec{b}$.

LEMMA 4.2. *Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
(2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
(3) $\langle \lambda\, x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

ÜBUNGSAUFGABEN 4.3.

(1) Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal steht.

(2) Sei $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix})$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E. Außerdem bezeichnen wir mit $\overline{B}$ die Matrix

$$\overline{B} := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Welches Gleichungssystem muss ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ erfüllen, der auf alle Vektoren in E normal steht? Was hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems mit $\overline{B}$ zu tun?
(b) Mit welchem Gleichungssystem können Sie feststellen, ob ein Vektor v in E liegt? Was hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems mit $\overline{B}$ zu tun?
(c) Sei $w = \begin{pmatrix} 16 \\ 44 \\ -6 \end{pmatrix}$. Finden Sie einen Vektor e, der in E liegt, sodass $w - e$ normal auf alle Vektoren in E steht.

[0]Unterlagen zur Vorlesung Algebra von Erhard Aichinger, Peter Mayr. 15.11.2007.

2. Orthonormalbasen

DEFINITION 4.4. Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $B = (b_1, \ldots, b_k)$ eine Basis von T. B ist eine *Orthonormalbasis* (ONB), wenn

(1) $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$.
(2) $\|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

BEISPIELE 4.5.

(1) Die kanonische Basis $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ ist ONB des $\mathbb{R}^3$.
(2) $B = ((\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, 0, 1))$ ist ONB des $\mathbb{R}^3$.
(3) $B = (\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1))$ ist ONB von $L((1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1))$.
(4) Sei $b_1 = (3, 4), b_2 = (-4, 3)$. Dann ist $(\frac{b_1}{5}, \frac{b_2}{5})$ ONB des $\mathbb{R}^2$.

ÜBUNGSAUFGABEN 4.6.

(1) (Orthonormalbasen) Welche der folgenden Basen sind ONB?
  (a) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix})$.
  (b) $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
  (c) $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$.

SATZ 4.7. *Sei $B = (b_1, \ldots, b_k)$ eine ONB und $v \in L(B)$ mit den Koordinaten $(v)_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Dann gilt*

$$\|v\|^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2.$$

*Beweis.*Da B eine ONB ist, gilt

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \cdot 1.$$

■

Wir wenden diesen Satz an:

Sei $b_1 = (0.6, 0.8)$, $b_2 = (-0.8, 0.6)$. Berechnen Sie die Länge von $v = 12 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2$!

Lösung: Da (b_1, b_2) eine ONB des $\mathbb{R}^2$ ist, gilt

$$\|v\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

Wir kontrollieren das Ergebnis, indem wir v berechnen. Da

$$v = 12 \cdot (0.6, 0.8) + 5 \cdot (-0.8, 0.6) = (3.2, 12.6),$$

gilt

$$\|v\| = \sqrt{(3.2)^2 + (12.6)^2} = 13.$$

SATZ 4.8. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit der ONB $B = (b_1, \ldots, b_k)$. Sei $v \in L(B)$ mit den Koordinaten $(v)_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Dann gilt*

$$\lambda_i = \langle v, b_i \rangle \textit{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$. Wir wissen, dass

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, b_j = v,$$

und somit

$$\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, b_j, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle.$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \langle b_j, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle$$

oder

$$\lambda_i \, \langle b_i, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle.$$

Somit gilt

$$\lambda_i = \langle v, b_i \rangle.$$

■

Bei Orthonormalbasen müssen wir also kein Gleichungssystem lösen, um die Koordinaten eines Vektors zu bestimmen. Dazu folgendes Beispiel: Gegeben sei die ONB $B = ((0.6, 0.8), (-0.8, 0.6))$. Gesucht sind die Koordinaten (λ_1, λ_2) von $v = (2, 1)$ bzgl. B.

$$\lambda_1 = \langle v, b_1 \rangle = 2, \quad \lambda_2 = \langle v, b_2 \rangle = -1.$$

Also gilt:

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Orthonormalbasis besitzt also zwei wesentliche Vorteile gegenüber normalen Basen:

(1) Mit $(v)_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ kann die Länge des Vektors v als

$$\|v\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2}$$

berechnet werden.

(2) Die Koordinaten eines Vektors v erhält man als

$$(v)_B = \begin{pmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{pmatrix}.$$

3. Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben ist ein Unterraum T mit der Basis $B = (b_1, \dots, b_m)$. Gesucht ist eine ONB $(d_1, \dots, d_m)$ von T.

Wir konstruieren $d_1, \dots, d_m$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $d_i \perp d_j$ für $i \neq j$,
(2) $\|d_i\| = 1$ für alle i,
(3) für alle $k \leq m$ gilt $L(b_1, \dots, b_k) = L(d_1, \dots, d_k)$.

(1) und (2) sollen garantieren, dass wir eine ONB erhalten. (3) fordert, dass die ersten k Vektoren der gesuchten ONB den gleichen Vektorraum aufspannen wie die ersten k Vektoren der Basis B.

ALGORITHMUS 4.9.

(1) *Konstruktion von d_1*: Wir setzen $c_1 = b_1$ und $d_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|}$.
(2) *Konstruktion von d_2*: Um (3) erfüllen zu können, machen wir den Ansatz

$$c_2 = b_2 + \alpha_1 \cdot d_1$$

mit $\langle c_2, d_1 \rangle = 0$. Aus

$$\langle b_2 + \alpha_1 \cdot d_1, d_1 \rangle = \langle b_2, d_1 \rangle + \alpha_1 \langle d_1, d_1 \rangle = \langle b_2, d_1 \rangle + \alpha_1 = 0$$

folgt

$$\alpha_1 = -\langle b_2, d_1 \rangle.$$

Also erhalten wir mittels

$$c_2 = b_2 - \langle b_2, d_1 \rangle \cdot d_1,$$
$$d_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|}$$

den gewünschten Vektor d_2.
(3) *Konstruktion von d_3*: Für c_3 machen wir analog zu c_2 den Ansatz

$$c_3 = b_3 + \alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2.$$

Fordern wir dann Normalität zu den ersten beiden Vektoren, so erhalten wir

$$\langle c_3, d_1 \rangle = \langle b_3, d_1 \rangle + \alpha_1 \underbrace{\langle d_1, d_1 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\langle d_2, d_1 \rangle}_{=0} = 0,$$

also

$$\alpha_1 = -\langle b_3, d_1 \rangle,$$

und

$$\langle c_3, d_2\rangle = \langle b_3, d_2\rangle + \alpha_1 \underbrace{\langle d_1, d_2\rangle}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\langle d_2, d_2\rangle}_{=1} = 0,$$

also

$$\alpha_2 = -\langle b_3, d_2\rangle.$$

Somit ergibt sich c_3 als

$$c_3 = b_3 - \langle b_3, d_1\rangle \cdot d_1 - \langle b_3, d_2\rangle \cdot d_2$$

und der gesuchte Vektor d_3 der Länge 1 als

$$d_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|}.$$

(4) *Konstruktion von d_i*: Seien $d_1, \dots, d_{i-1}$ bereits bekannt. Dann setzen wir

$$c_i = b_i - \langle b_i, d_1\rangle \cdot d_1 - \cdots - \langle b_i, d_{i-1}\rangle \cdot d_{i-1}$$

und erhalten mit

$$d_i = \frac{c_i}{\|c_i\|}$$

den gewünschten Vektor.

AUFGABEN 4.10. (1) Sei

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Gesucht ist eine ONB von $L(B)$.

Offenbar ist $c_1 = (1, -1, 1, -1)$ und somit

$$d_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \langle(-1, 1, 3, -3), d_1\rangle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$d_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist

$$c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle (1,0,0,0), d_1 \rangle\, d_1 - \langle (1,0,0,0), d_2 \rangle\, d_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$d_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Sei $B = ((3,4),(5,6))$. Gesucht ist eine ONB von $L(B)$.
Wir erhalten

$$d_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, dass die beiden Vektoren tatsächlich normal aufeinander stehen.

SATZ 4.11. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann hat T eine ONB.*

Beweis. Aus einer beliebigen Basis von T kann mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine ONB berechnet werden. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 4.12.

(1) Orthonormalisieren Sie die folgende Familie von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt!

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(2) Bestimmen Sie jeweils eine Orthonormalbasis (ONB) für folgende Unterräume des $\mathbb{R}^3$!
  (a) $U = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
  (b) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \text{ und } x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\}$. (Hinweis: Berechnen Sie zuerst eine Basis von V und orthonormalisieren Sie diese mit dem Verfahren von Gram-Schmidt).
(3) Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene $e : x - 2y + 3z = 0$ an.
(4) Bestimmen Sie mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

4. Orthogonalprojektionen

SATZ 4.13. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften*

(1) $x \in T$,
(2) $v - x \in T^{\perp}$.

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma.

LEMMA 4.14. *Seien $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. B sei definiert als die $n \times k$-Matrix mit den Spalten $b_1, \dots, b_k$. Dann ist $B^T \cdot B$ invertierbar.*

Man kann zeigen, dass die Spaltenvektoren von $B^T \cdot B$ linear unabhängig sind. Später werden wir sehen (im Satz **??**), dass jede quadratische Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren invertierbar ist.

Beweis von Satz 4.13.

- Zunächst zeigen wir, dass so ein x existiert. Sei $(b_1, \dots, b_k)$ eine Basis von T, und sei B die $n \times k$-Matrix, in deren Spalten die Vektoren $b_1, \dots, b_k$ stehen. Wir versuchen $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ zu finden, sodass
$$x := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot b_i = B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}_{\alpha}$$
die Eigenschaft $v - B \cdot \alpha \in T^\perp$ erfüllt. Dann muss gelten: $\langle b_j, v - x\rangle = \langle b_j, v - B \cdot \alpha\rangle = 0$ für alle j, oder, anders ausgedrückt,
$$\begin{pmatrix} \langle b_1, v - B \cdot \alpha\rangle \\ \langle b_2, v - B \cdot \alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle b_k, v - B \cdot \alpha\rangle \end{pmatrix} = B^T \cdot (v - B \cdot \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
und somit
$$B^T \cdot v - B^T \cdot B \cdot \alpha = 0,$$
also
$$B^T \cdot v = (B^T \cdot B) \cdot \alpha.$$
Da die Basisvektoren linear unabhängig sind, ist nach Lemma 4.14 die Matrix $B^T \cdot B$ invertierbar. Somit muss α die Gleichung
$$(B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = (B^T \cdot B)^{-1}(B^T \cdot B) \cdot \alpha = \alpha$$
erfüllen. Wir erhalten als Kandidaten für x also
$$x = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v.$$
Wir überprüfen jetzt, ob $v - x$ wirklich in $T^\perp$ liegt, und erhalten
$$\begin{aligned} B^T(v - x) &= B^T(v - B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v) \\ &= B^T \cdot v - B^T \cdot B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v) \\ &= B^T v - B^T v = 0. \end{aligned}$$
- Eindeutigkeit: Seien x, y zwei Vektoren, die den Bedingungen des Satzes 4.13 genügen, d.h.

(1) $x, y \in T$,
(2) $v - x, v - y \in T^{\perp}$.
Wegen (1) gilt $x - y \in T$. Aus (2) erhalten wir $(v - x) - (v - y) = -x + y \in T^{\perp}$. Daher gilt auch $-(-x + y) = x - y \in T^{\perp}$. Da $x - y \in T$ und $x - y \in T^{\perp}$, gilt $\langle x - y, x - y\rangle = 0$. Also gilt $\|(x - y)\|^2 = 0$, und folglich $x = y$.

Somit existiert genau ein x, das die obigen Eigenschaften erfüllt. ■

DEFINITION 4.15. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und sei $v \in \mathbb{R}^n$. Das $x \in T$ mit $v-x \in T^{\perp}$ nennen wir *orthogonale Projektion* von v auf T und schreiben $x = P_T(v)$.

Wenn T der Spaltenraum der Matrix B mit linear unabhängigen Spalten $(b_1, \dots, b_k)$ ist, also $T = S(B)$, dann ist $(b_1, \dots, b_k)$ eine Basis von T. Wie im Beweis von Satz 4.13 ermittelt, gilt dann

$$P_T(v) = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T v.$$

AUFGABEN 4.16.

(1) Gesucht ist die orthogonale Projektion von $(4, 2)$ auf die Gerade $G = \{(x, y) \mid 3\,x- 4\,y = 0\}$.
Lösung: Für $B = \binom{4}{3}$ gilt $G = S(B)$. Wegen $B^T \cdot B = (4^2 + 3^2) = (25)$ und $B^T \cdot v = (16 + 6) = (22)$ ist

$$P_G(v) = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = \frac{22}{25}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Wir berechnen die orthogonale Projektion des Vektors $v = (6, 0, 0)$ auf die Ebene $e = L((1, 2, 1), (-1, 0, 1))$. Wir bilden eine Matrix B, in deren Spalten wir die Basisvektoren von e schreiben. In diesem Fall gilt

$$B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B^T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$P_e(v) = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 4.17.
Wir wollen die Pyramide mit der quadratischen Grundfläche (A, B, C, D) und der Spitze S als $2D$-Graphik auf dem Bildschirm darstellen. Lösen Sie dazu folgende Probleme:

(1) Sei die Ebene $e = L(B)$ durch ihre Basis

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}\right)$$

gegeben. Bestimmen Sie für $v = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ die Projektion von v auf $L(B)$, also $P_{L(B)}(v)$.

(2) Bestimmen Sie die Koordinaten von $P_{L(B)}(v)$ bezüglich B.

(3) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene e, die durch

$$e : x - 2y + 2z = 0$$

gegeben ist.

(4) Welcher Punkt auf e hat von $\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}$ den geringsten Abstand?

SATZ 4.18. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$P_{T^\perp}(v) = v - P_T(v).$$

Beweisskizze. Wir definieren $y := v - P_T(v)$. Man kann zeigen, dass y die Eigenschaften der Projektion von v auf $T^\perp$ erfüllt. ■

Aus diesem Satz können wir sofort eine Formel für die Projektion auf $T^\perp$ ableiten. Sei B eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten, sodass $T = S(B)$. Dann gilt:

$$P_{T^\perp}(v) = (E_n - B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T) \cdot v.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 4.19.

(1) (a) Bestimmen Sie für jeden Vektor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Projektion auf $U := \{(x, y, z) \mid -x + 2y + 2z = 0\}$.
  (b) Bestimmen Sie eine Matrix P_U, sodass die Projektion von v auf U gleich $P_U \cdot v$ ist.
  (c) Bestimmen Sie $P_U \cdot P_U$!

(2) Sei $U := \{(x, y, z) \mid -x + 2y + 2z = 0\}$.
  (a) Bestimmen sie für jeden Vektor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Projektion von v auf den Orthogonalraum von U, also auf $U^\perp$.
  (b) Bestimmen Sie eine Matrix $P_{U^\perp}$, sodass die Projektion von v auf $U^\perp$ gleich $P_{U^\perp} \cdot v$ ist.
  (c) Bestimmen Sie $P_{U^\perp} \cdot P_{U^\perp}$.

5. Abstandsberechnungen mit Hilfe der Orthogonalprojektion

5.1. Abstand eines Punktes von einem Unterraum. Gegeben sei ein Unterraum T des $\mathbb{R}^n$ sowie ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist jenes $x \in T$, das von v den kleinsten Abstand hat.

SATZ 4.20. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, und sei $x \in T$. Dann sind äquivalent:*

(1) $\|v - x\| = \inf\{\|v - t\| : t \in T\}$.
(2) *Der Vektor x ist die Projektion von v auf T, also $x = P_T(v)$.*

Beweis. (2)⇒(1): Wir nehmen an, $x = P_T(v)$. Sei $t \in T$. Dann gilt

$$\|v - t\|^2 = \|(v - x) + (x - t)\|^2.$$

Da $v - x \in T^\perp$ und $x - t \in T$, gilt

$$\|(v - x) + (x - t)\|^2 = \|v - x\|^2 + \|x - t\|^2.$$

Es gilt also

$$\text{Für alle } t \in T\colon \|v - t\| \geq \|v - x\|.$$

Also gilt

$$\|v - x\| = \inf\{\|v - t\| \ :\ t \in T\}.$$

(1)⇒(2): Sei x so, dass $\|v - x\| = \inf\{\|v - t\| \ :\ t \in T\}$, und sei $y = P_T(v)$. Es gilt dann $\|v - x\| \leq \|v - y\|$ und $\|v - x\|^2 = \|(v - y) + (y - x)\|^2 = \|v - y\|^2 + \|y - x\|^2$. Das ergibt ingesamt $\|v - y\|^2 \geq \|v - y\|^2 + \|y - x\|^2$, also $\|y - x\|^2 = 0$. Somit gilt $x = y = P_T(v)$. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 4.21.

(1) Welcher Punkt auf der Geraden

$$g = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$$

hat von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ den kleinsten Abstand?

(2) Wir betrachten den Punkt $p \in \mathbb{R}^4$ und den Unterraum U des $\mathbb{R}^4$.

$$p = (8, 10, 1, 14),$$

$$U = L((-1, -2, 0, 3)).$$

Welcher Punkt p_0 aus U hat von p den kleinsten Abstand?

5.2. Abstand zwischen zwei linearen Mannigfaltigkeiten. Wenn A und B nichtleere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind, dann kann man ihren *Abstand* durch

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\|a - b\| \mid a \in A, b \in B\}$$

definieren.

Gegeben sind zwei lineare Mannigfaltigkeiten $M_1 = v_1 + T_1$ und $M_2 = v_2 + T_2$. Dabei sind $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, und T_1, T_2 sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Wir suchen $p_1 \in M_1$ und $p_2 \in M_2$, sodass

$$\|p_1 - p_2\| = \operatorname{dist}(M_1, M_2).$$

Dazu bestimmen wir $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$, sodass

$$\|(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2)\| = \operatorname{dist}(M_1, M_2).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(M_1, M_2) &= \inf\{\|(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2)\| \mid t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\} \\ &= \inf\{\|(v_1 - v_2) - (t_2 - t_1)\| \mid t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\} \\ &= \inf\{\|(v_1 - v_2) - s\| \mid s \in T_1 + T_2\}.\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $(v_1 - v_2) - \overline{s}$ genau dann das Infimum von $\{(v_1 - v_2) - s \mid s \in T_1 + T_2\}$ annimmt, wenn $\overline{s} = P_{T_1+T_2}(v_1 - v_2)$. Also berechnen wir

$$\overline{s} := P_{T_1+T_2}(v_1 - v_2).$$

Folglich gilt für $\overline{t_1} \in T_1$ und $\overline{t_2} \in T_2$ die Gleichung

$$(v_1 + \overline{t_1}) - (v_2 + \overline{t_2}) = \inf\{(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2) \mid t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\}$$

genau dann, wenn $\overline{t_2} - \overline{t_1} = \overline{s}$. Wir müssen also alle $(\overline{t_1}, \overline{t_2}) \in T_1 \times T_2$ bestimmen, sodass $\overline{t_2} - \overline{t_1} = \overline{s}$. Wir bestimmen uns also ein $t_1' \in T_1$ und ein $t_2' \in T_2$, sodass $t_2' - t_1' = \overline{s}$. Dann gilt

$$\{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \,|\, t_1 - t_2 = s\} = \{t_1' + r, t_2' + r) \,|\, r \in T_1 \cap T_2\}.$$

Damit erhalten wir

$$\{(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2 \mid \|p_1 - p_2\| = \operatorname{dist}(M_1, M_2)\} = \{\big(v_1 + t_1' + r, v_2 + t_2' + r\big) \,|\, r \in T_1 \cap T_2\}.$$

AUFGABE 4.22. Bestimmen Sie jene Punkte auf den Mannigfaltigkeiten

$$M_1 := (5, 0, 0, 0) + L((1, 2, -1, 0), (1, 1, 1, 1))$$

und

$$M_2 := (11, 27, 2, 11) + L((1, -1, -1, 1), (1, 0, 0, 1)),$$

die voneinander geringsten Abstand haben.

Sei $T_1 = L((1, 2, -1, 0), (1, 1, 1, 1))$ und $T_2 = L((1, -1, -1, 1), (1, 0, 0, 1))$. Wir berechnen eine Basis von $T_1 + T_2$.

```
In[77]:= B1 = {{1, 2, -1, 0}, {1, 1, 1, 1}};

         B2 = {{1, -1, -1, 1}, {1, 0, 0, 1}};
Out[77]= {{1, -1, -1, 1}, {1, 0, 0, 1}}
```

```
In[78]:= BasisVonT1PlusT2 = RowReduce [B1 ~Join~ B2]
```

$$\text{Out[78]= } \left\{\{1, 0, 0, 1\}, \left\{0, 1, 0, -\frac{1}{3}\right\}, \left\{0, 0, 1, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\}$$

Also erhalten wir

$$B = ((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1/3), (0, 0, 1, 1/3))$$

als Basis von $T_1 + T_2$. Jetzt können wir die Projektion von $v_1 - v_2$ auf $T_1 + T_2$ ausrechnen. Sei C die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$P_{T_1+T_2}(v_1 - v_2) = C \cdot (C^T \cdot C)^{-1} \cdot C^T \cdot (v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} -12 \\ -25 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\overline{s} = (-12, -25, -4, -5)$. Dieses $\overline{s}$ wollen wir als $-t_1' + t_2'$ mit $t_1' \in T_1$ und $t_2' \in T_2$ darstellen. Durch die folgenden Mathematica-Berechnungen erhalten wir

$$\overline{s} = -7 \cdot (1, 2, -1, 0) - 8 \cdot (1, 1, 1, 1) + 3 \cdot (1, -1, -1, 1) + 0 \cdot (1, 0, 0, 1).$$

```
In[79]:= s
Out[79]= {-12, -25, -4, -5}
```

```
In[80]:= B1B2 = B1 ~Join~ B2
Out[80]= {{1, 2, -1, 0}, {1, 1, 1, 1}, {1, -1, -1, 1}, {1, 0, 0, 1}}
```

```
In[81]:= M = Transpose[B1B2]
Out[81]= {{1, 1, 1, 1}, {2, 1, -1, 0}, {-1, 1, -1, 0}, {0, 1, 1, 1}}
```

```
In[82]:= MatrixForm[M]
```

$$\text{Out[82]=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[83]:= LinearSolve[M, s]
Out[83]= {-7, -8, 3, 0}
```

Für $t_1' = 7 \cdot (1, 2, -1, 0) + 8 \cdot (1, 1, 1, 1)$ und $t_2' = 3 \cdot (1, -1, -1, 1)$ gilt also

$$\bar{s} = -t_1' + t_2'.$$

Wir erhalten

$$t_1' = (15, 22, 1, 8)\,,\ \ t_2' = (3, -3, -3, 3).$$

Also sind die Punkte

$$p_1 = (5, 0, 0, 0) + (15, 22, 1, 8) = (20, 22, 1, 8)$$

und

$$p_2 = (11, 27, 2, 11) + (3, -3, -3, 3) = (14, 24, -1, 14)$$

so, dass $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$, und $\|p_1 - p_2\| = \mathrm{dist}(M_1, M_2)$.

Um alle Punkte zu erhalten, für die der Abstand minimal wird, müssen wir noch $T_1 \cap T_2$ berechnen.

```
In[84]:= C1 = NullSpace[{{1, 2, -1, 0}, {1, 1, 1, 1}}];
         MatrixForm[C1]
```

$$\text{Out[84]=} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[85]:= C2 = NullSpace[{{1, -1, -1, 1}, {1, 0, 0, 1}}];
         MatrixForm[ C2]
```

$$\text{Out[85]=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[86]:= NullSpace[Join[C1, C2]]
Out[86]= {{1, 1, 1, 1}}
```

Wir erhalten $T_1 \cap T_2 = L((1, 1, 1, 1))$. Somit ist die Menge aller Paare in $M_1 \times M_2$, die minimalen Abstand voneinander haben, gegeben als

$$\{\big((20, 22, 1, 8) + t \cdot (1, 1, 1, 1)\,, (14, 24, -1, 14) + t \cdot (1, 1, 1, 1)\big) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Folgendes Mathematica-Programm liefert zwei Punkte mit minimaler Distanz. Achtung: die Basisvektoren von T_1 und T_2 stehen hier in den *Zeilen* der Argumente B_1 und B_2.

```
Proj [B_, v_] :=
   Transpose [B] . Inverse [B . Transpose[B]]. B. v;


PointsWithMinimalDistance [v1_, B1_, v2_, B2_] :=
Module[{},
   B12 = RowReduce [B1 ~Join~ B2];
   If [MatrixRank[B12] == 0,
         {v1, v2},
      Basis12 = Take [B12, MatrixRank [B12]];
      s = Proj [Basis12, v1 - v2];
      t1 = - Transpose [B1].Take [LinearSolve
              [Transpose [B1 ~Join~ B2], s], Length [B1]];
      t2 = s + t1;
      {v1 + t1, v2 + t2}
  ]
];
```

Wir testen dieses Programm:

```
In[87]:= << abstand2.m

In[88]:= v1 = {5, 0, 0, 0};

         v2 = {11, 27, 2, 11};

         T1 = {{1, 1, 1, 1}, {1, 2, -1, 0}};

         T2 = {{1, 0, 0, 1}, {1, -1, -1, 1}};

In[89]:= PointsWithMinimalDistance [v1, T1, v2, T2]
Out[89]= {{23, 25, 4, 11}, {17, 27, 2, 17}}
```

ÜBUNGSAUFGABEN 4.23.

(1) Welcher Punkt auf der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

hat von $\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ den geringsten Abstand?

(2) Bestimmen Sie den Punkt auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$, der am nächsten beim Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt.

(3) (a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums W von $\mathbb{R}^4$, der durch

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -x_1 + x_3 = 0 \text{ und } -x_2 + x_4 = 0\}.$$

gegeben ist.

(b) Welcher Punkt in W hat von $(4, -1, 6, -1)$ den geringsten Abstand?

(4) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ von der Geraden g, die durch den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ geht, und deren Richtungsvektor gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

(5) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(8, 2, 11, 17)$ von der Geraden g, die durch

$$g : X = (1, 2, -4, 7) + t \cdot (12, 0, 3, 4)$$

gegeben ist. Welcher Geradenpunkt ist diesem Punkt am nächsten?

(6) (a) Welcher Punkt p auf der Geraden

$$g : -2x + z = 0 \text{ und } 2x + y = 0$$

hat vom Punkt $v = \begin{pmatrix} -10 \\ -25 \\ 25 \end{pmatrix}$ den geringsten Abstand?

(b) Wie groß ist dieser Abstand?

(c) Berechnen Sie $v - p$! Welchen Winkel schließen p und $v - p$ miteinander ein?

(7) Welcher Punkt der Ebene

$$e : X = \begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kommt dem Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ am nächsten ?

(8) Welche Punkte der Geraden

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} -24 \\ -52 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kommen einander am nächsten?

(9) Welcher Punkt der Ebene

$$e : X = \begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kommt dem Punkt $\begin{pmatrix} -47 \\ -95 \\ 34 \end{pmatrix}$ am nächsten?

(10) Welcher Punkt der Ebene

$$e : X = (5, 2, 1, 0) + \lambda \cdot (1, 2, 0, 0) + \mu \cdot (0, 1, 2, -1)$$

kommt der Geraden

$$g : X = (5, 3, 0, 5) + \alpha \cdot (1, 0, 2, 0)$$

am nächsten?

(11) Berechnen Sie den Inkreismittelpunkt $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ des Dreiecks ABC mit $A = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, indem Sie die Bedingung, dass I gleich weit von AB, BC und AC entfernt ist, in Gleichungen in den Variablen i_1 und i_2 umwandeln. Verwenden Sie zur Lösung der auftretenden Gleichungen den Mathematica-Befehl `Solve`.

6. Die bestapproximierende Lösung eines linearen Gleichungssystems

Oft trifft man auf Gleichungssysteme, die keine Lösung besitzen, wie z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In solchen Fällen wird man ein x suchen, das dem Gleichungssystem "möglichst gut" genügt. Naheliegend ist es, jenes x als "Lösung" zu betrachten, das den kleinsten Fehler liefert, d.h. für das $\|A \cdot x - b\|$ minimal ist.

DEFINITION 4.24. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Eine *bestapproximierende Lösung* des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist ein $x^* \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|A \cdot x^* - b\|$ minimal ist.

Wir wissen, dass $\{A\cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ genau der Spaltenraum von A ist. Wir suchen also jenes Element des Spaltenraumes von A, das von b minimalen Abstand hat. Dazu sollte $A \cdot x$ die Projektion von b auf den Spaltenraum von A sein. Dann steht $b - A \cdot x$ auf den Spaltenraum von A normal. Es gilt also

$$A^T \cdot (b - A \cdot x) = 0.$$

Wenn $A^T \cdot A$ invertierbar ist, dann können wir x durch $x = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$ bestimmen.

SATZ 4.25. *Sei A eine Matrix, deren Spaltenvektoren linear unabhängig sind, und sei b ein Vektor. Dann ist die bestapproximierende Lösung x^* von $A \cdot x = b$ gegeben durch*

$$x^* = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b.$$

AUFGABE 4.26. Wir bestimmen die bestapproximierende Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir

$$x^* = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 4.27.

(1) Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist für folgendes A und b unlösbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die “beste Näherungslösung”. Warum (bzw. in welchem Sinn) ist diese Lösung “besser” als $(1, 1)$?

Nun versuchen wir, die “beste Gerade durch eine Punktwolke” zu legen.

Gegeben seien die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist die bestapproximierende Gerade $y = k\,x + d$ durch diese Punktwolke.

Dafür berechnet man die bestapproximierende Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

wie oben beschrieben. Wir überlegen uns noch, welcher “Abstand” zwischen Punkten und Gerade hier wirklich minimiert wird. Die bestaproximierende Lösung minimiert

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} y_1 - (k\,x_1 + d) \\ \vdots \\ y_n - (k\,x_n + d) \end{pmatrix} \right\|,$$

also die Vertikalabstände zwischen den Punkten und der Gerade.

ÜBUNGSAUFGABEN 4.28.

(1) Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = k\,x + d$, die die Punkte $(0, 3)$, $(1, 4)$ und $(2, 7)$ bestmöglich approximiert. "Bestmöglich" heißt dabei, dass k und d so zu bestimmen sind, dass
$$(y_1 - (k\,x_1 + d))^2 + (y_2 - (k\,x_2 + d))^2 + (y_3 - (k\,x_3 + d))^2$$
minimal wird.

(2) Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = k\,x + d$, die die Punkte $(2, 3)$, $(3, 0)$ und $(6, 5)$ bestmöglich approximiert. "Bestmöglich" heißt dabei, dass k und d so zu bestimmen sind, dass
$$(y_1 - (k\,x_1 + d))^2 + (y_2 - (k\,x_2 + d))^2 + (y_3 - (k\,x_3 + d))^2$$
minimal wird.