

ANHANG A

Matrizen

1. Die Definition von Matrizen

Wir haben bereits *Vektoren* kennen gelernt; solche Paare reeller Zahlen haben wir benutzt, um Punkte in der Ebene zu beschreiben. In der Geometrie brauchen wir auch *Matrizen*. Matrizen eignen sich besonders gut, um etwa Drehungen oder Spiegelungen zu beschreiben.

Eine *Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema. Zunächst einige Beispiele:

BEISPIELE A.1.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine 2×3 -Matrix.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine 2×2 -Matrix.
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine 2×1 -Matrix.
- $(1 \ 2 \ 7)$ ist eine 1×3 -Matrix.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir als eine $m \times n$ -Matrix. Wenn A eine $m \times n$ -Matrix ist, und $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, so bezeichnen wir mit $A(i, j)$, $A[i, j]$ oder $A_{i,j}$ den Eintrag, der bei A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte steht. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt zum Beispiel $A_{2,1} = 7$. Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen kürzen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ ab.

Wir müssen noch den Begriff “rechteckiges Zahlenschema” klären. Man kann eine $m \times n$ -Matrix A mit Einträgen aus \mathbb{R} als Funktion von $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ nach \mathbb{R} definieren. Der Eintrag, der in der 2. Zeile und 4. Spalte steht, ist dann der Funktionswert $A(2, 4)$. Diese Sichtweise gibt auch recht gut wieder, was eine Implementation des abstrakten Datentyps “Matrix” können muss. Es muss möglich sein, eine Funktion `LiefereEintrag` zu schreiben, sodass `LiefereEintrag(A, i, j)` den Eintrag von A an der i -ten Zeile und j -ten Spalte, also den Funktionswert $A(i, j)$, zurückgibt.

⁰Unterlagen zur Vorlesung Algebra von Erhard Aichinger, Peter Mayr. Alle Rechte vorbehalten. 27.11.2007.

In Mathematica geben wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

wie folgt ein.

`In[90] := A = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}`

`Out[90] = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}`

`In[91] := MatrixForm[A]`

`Out[91] = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$`

`In[92] := A = {{5, 7, 8}, {-2, 3, 5}}`

`Out[92] = {{5, 7, 8}, {-2, 3, 5}}`

`In[93] := MatrixForm[A]`

`Out[93] = $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$`

`In[94] := A[[2]][[1]]`

`Out[94] = -2`

2. Die Addition von Matrizen

Zwei Matrizen kann man addieren, wenn sie gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben. Wie man zwei Matrizen von gleichem Format addiert, erklären wir mit folgenden Beispielen.

AUFGABEN A.2.

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 13 & 7 & -2 \end{pmatrix} \\ & \bullet \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \\ & \bullet \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \\ & \bullet \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen, wie diese Addition funktioniert: Zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ lassen sich genau dann addieren, wenn $m = n$ und $k = l$ gilt, d.h. wenn die Matrizen von gleichem Format sind. Wenn C die Matrix $A + B$ ist, dann hat auch C das Format $m \times k$, und für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ berechnet man den Eintrag $C_{i,j}$ durch

$$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

`In[95] := A = {{1, 4, 3}, {0, 1, 0}};`

`In[96] := B = {{-7, 5, 0}, {23, -7, 16}};`

`In[97] := A + B`

`Out[97] = {{-6, 9, 3}, {23, -6, 16}}`

`In[98] := MatrixForm [%]`

`Out[98] = $\begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 23 & -6 & 16 \end{pmatrix}$`

3. Die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

Eine Matrix A wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem jeder Eintrag mit der Zahl multipliziert wird. Wir geben dazu wieder ein Beispiel:

AUFGABE A.3.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Wir formulieren wieder allgemein, wie man eine reelle Zahl mit einer Matrix A multipliziert. Wenn t eine reelle Zahl, und A eine $m \times n$ -Matrix ist, so ist die Matrix $C := t \cdot A$ ebenfalls eine $m \times n$ -Matrix. Die Einträge von C sind dadurch gegeben, dass für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt:

$$C_{i,j} = t A_{i,j}.$$

`In[99] := A = {{2, 5}, {3, 4}, {10, 2}}`

`Out[99] = {{2, 5}, {3, 4}, {10, 2}}`

`In[100] := MatrixForm [(-10) * A]`

`Out[100] = $\begin{pmatrix} -20 & -50 \\ -30 & -40 \\ -100 & -20 \end{pmatrix}$`

4. Die Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen A , B können genau dann miteinander multipliziert werden, wenn A genauso viele Spalten wie B Zeilen hat. Eine $k \times l$ -Matrix ist also mit einer $m \times n$ -Matrix multiplizierbar, wenn $l = m$. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist eine $k \times n$ -Matrix. Wir erklären die Matrixmultiplikation zunächst anhand eines Beispiels.

AUFGABE A.4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 7 & 2 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 37 & 6 \\ 39 & 62 & 15 \end{pmatrix}.$$

Wenn man eine $k \times m$ -Matrix A mit einer $m \times n$ -Matrix B multipliziert, so ist das Produkt C eine $k \times n$ -Matrix. Für $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist der Eintrag $C_{i,j}$ das Skalarprodukt aus der i -ten Zeile von A und der j -ten Spalte von B . Wir rechnen noch einige Beispiele:

AUFGABEN A.5.

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 19 \\ 23 & -13 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ ist nicht definiert, da die erste Matrix 3 Spalten und die zweite Matrix 2 Zeilen hat, und 2 nicht gleich 3 ist.}$$

Wenn A eine 2×3 und B eine 3×1 -Matrix ist, dann ist das Produkt $A \cdot B$ eine 2×1 -Matrix. Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert. Selbst dann, wenn beide Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert sind, müssen die Ergebnisse nicht gleich sein. Dazu rechnen wir folgende Beispiele:

AUFGABEN A.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (17)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 25 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Das erste Beispiel noch einmal in Mathematica.

```
In[101]:= A = {{3, 1, 2}, {2, 5, 4}};
          B = {{3, 9, 3}, {1, 8, 5}, {7, 1, -4}};
```

```
In[102]:= MatrixForm [A.B]
```

```
Out[102]=  $\begin{pmatrix} 24 & 37 & 6 \\ 39 & 62 & 15 \end{pmatrix}$ 
```

5. Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von Matrizen

Wir haben bereits gesehen, dass nicht für alle Matrizen $A \cdot B = B \cdot A$ gelten muss. Einige Rechenregeln, die wir vom Rechnen mit Zahlen kennen, gelten aber auch für Matrizen.

SATZ A.7 (Assoziativität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, und seien $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

SATZ A.8 (Rechtsdistributivität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Dann gilt*

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C).$$

SATZ A.9 (Links-distributivität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B, C \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Dann gilt*

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

Es ist nicht schwierig, die Assoziativität der Matrizenmultiplikation zu beweisen, wenn A, B, C alle 2×2 -Matrizen sind. Man berechnet

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right),$$

und stellt fest, dass beide Ergebnisse gleich sind. Für Matrizen von beliebigem Format braucht man folgende Definition der Matrixmultiplikation: Wenn A eine $k \times m$ -Matrix, B eine $m \times n$ -Matrix, und $C = A \cdot B$ ist, so gilt für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$C[i, j] := \sum_{r=1}^m A[i, r] \cdot B[r, j].$$

6. Die Multiplikation von Vektoren und Matrizen

Sei $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist der Vektor $A \cdot v$ gegeben durch

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 16 \\ -2 + 0 \\ 2 + 4 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor im \mathbb{R}^3 .

Die Multiplikation sieht also genauso aus wie die Multiplikation der 3×2 -Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit der 2×1 -Matrix $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bei der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis aber eine 3×1 -Matrix.

Mit Mathematica wird der Unterschied deutlich:

```
In[103]:= A = {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}};
```

```
v = {-2, 4};
```

```
x = A.v
```

```
Out[103]= {22, -2, 6}
```

```
In[104]:= A = {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}};
```

```
v = {{-2}, {4}};
```

```
x = A.v
```

```
Out[104]= {{22}, {-2}, {6}}
```

```
In[105]:= A = {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}};
```

```
v = {{-2, 4}};
```

```
x = A.v
```

Hier liefert Mathematica eine Fehlermeldung.

```
Out[105]= {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}}.{{-2, 4}}
```

Sei $v = (-4, 3, 2)$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist der Vektor $v \cdot A$ gegeben durch

$$(-4, 3, 2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (12 + 3 - 2, -20 + 2) = (13, -18).$$

Das Ergebnis ist ein Vektor im \mathbb{R}^2 .

Die Multiplikation sieht also genauso aus wie die Multiplikation der 1×3 -Matrix $(-4 \ 3 \ 2)$ mit der 3×2 -Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Bei der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis aber eine 1×2 -Matrix.

Wenn man diese Multiplikation ‘‘Matrix mal Vektor’’ verwendet, lassen sich lineare Gleichungssysteme kürzer anschreiben.

$$3x + 4y - 2z = 1$$

$$2x + 5y - 8z = 2$$

läßt sich dann als

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

schreiben. Im allgemeinen erhält man bei m Gleichungen und n Unbekannten die Form

$$A \cdot x = b,$$

wobei A eine $m \times n$ -Matrix ist, x ein Vektor im \mathbb{R}^n und b ein Vektor im \mathbb{R}^m .

Die Funktion `LinearSolve[A, b]` liefert eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Wir lösen zum Beispiel $2x - 3y = 5$.

```
In[106]:= LinearSolve[{{2, -3}}, {5}]
```

```
Out[106]= {5/2, 0}
```

Später werden wir sehen, wie man alle Lösungen erhält.

7. Das Transponieren von Matrizen

Beim *Transponieren* einer Matrix wird die Matrix an der Hauptdiagonale gespiegelt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Wenn A eine $m \times n$ -Matrix ist, so ist A^T eine $n \times m$ -Matrix, und für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ gilt

$$A^T(i, j) = A(j, i).$$

```
In[107]:= A = {{1, 4, -3}, {2, -5, 3}};
```

```
In[108]:= MatrixForm[A]
```

```
Out[108]=  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 
```

```
In[109]:= B = Transpose[A]
```

```
Out[109]= {{1, 2}, {4, -5}, {-3, 3}}
```

```
In[110]:= MatrixForm[B]
```

```
Out[110]=  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 
```

SATZ A.10. *Haben die Matrizen passendes Format, sodass Addition bzw. Multiplikation ausführbar sind, so gilt:*

- (1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
 (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

ÜBUNGSAUFGABEN A.11.

- (1) Berechnen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

die Matrix $B := A^T \cdot A$.

- (2) Berechnen Sie $(A - B) \cdot C^T$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (3) Finden Sie eine Matrix X , sodaß $A \cdot X = B$, wobei $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$. (Hinweis: Bestimmen Sie jede Spalte von X durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.)

8. Die Einheitsmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Einheitsmatrix vom Format $n \times n$. Man sieht leicht, daß für jede $m \times n$ -Matrix A und jede $n \times k$ -Matrix B gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot E_n &= A, \\ E_n \cdot B &= B. \end{aligned}$$

Besonders einfach zu lösen sind Gleichungssysteme mit der Einheitsmatrix: Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $x = 4$, $y = 2$, und daher die Lösungsmenge $L = \{(4, 2)\}$.

```
In[1111]:= A = -24 * IdentityMatrix[5];
```

```
MatrixForm[A]
Out[1111]=
```

$$\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

9. Das Invertieren von Matrizen

Betrachtet man die Gleichung $5x = 7$, so erhält man die Lösung $x = \frac{7}{5}$ durch Multiplikation beider Seiten mit $\frac{1}{5}$ (des Inversen von 5). Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Seien wir nun optimistisch, und stellen wir uns vor, wir haben eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sodass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Lösungen des Gleichungssystems muss dann auch gelten:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie bestimmen wir so eine Matrix A ? Wir suchen eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2a + 5b &= 1 \\ 3a - 5b &= 0 \\ 2c + 5d &= 0 \\ 3c - 5d &= 1 \end{aligned}$$

Lösen wir dieses, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 \\ 0,2 & -0,08 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir auch die Lösung des ursprünglichen Systems berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(0, 4)$ der einzige Kandidat für eine Lösung des Systems. Da $(0, 4)$ auch wirklich Lösung ist, ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{(0, 4)\}$.

DEFINITION A.12. Sei A eine $n \times n$ -Matrix über \mathbb{R} . A heißt *invertierbar*, falls es eine $n \times n$ -Matrix B mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$ gibt.

SATZ A.13. Seien A_1, A_2 invertierbare Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist auch $A_1 \cdot A_2$ invertierbar.

Beweis. Seien $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Es gibt daher Matrizen B_1, B_2 , sodass $A_1 \cdot B_1 = B_1 \cdot A_1 = E_n$ und $A_2 \cdot B_2 = B_2 \cdot A_2 = E_n$. Dann gilt $(A_1 \cdot A_2) \cdot (B_2 \cdot B_1) = A_1 \cdot (A_2 \cdot B_2) \cdot B_1 = A_1 \cdot E_n \cdot B_1 = A_1 \cdot B_1 = E_n$. Somit ist $A_1 \cdot A_2$ invertierbar. ■

SATZ A.14. Sei A eine invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$, und sei B so, dass $A \cdot B = B \cdot A = E_n$. Sei C eine Matrix mit $A \cdot C = E_n$. Dann gilt $B = C$.

Beweis. Es gilt $C = E_n \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot E_n = B$. ■

Zu jeder invertierbaren Matrix A gibt es also genau eine Matrix B mit $A \cdot B = E_n$. Diese Matrix B kürzen wir mit A^{-1} ab.

DEFINITION A.15. Sei A eine $n \times n$ -Matrix. A ist *regulär* genau dann, wenn A invertierbar ist. A ist *singulär* genau dann, wenn A nicht invertierbar ist.

ÜBUNGSAUFGABEN A.16.

- (1) Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gilt.

- (2) Sei A eine $m \times m$ -Matrix, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt, und sei E die $m \times m$ -Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist. *Hinweis:* Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

SATZ A.17. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbare Matrizen.

- (1) A^{-1} ist invertierbar, und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (2) A^T ist invertierbar, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- (3) $A \cdot B$ ist invertierbar, und es gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Beweis.

- (1) Es gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$. Also ist A^{-1} invertierbar, und $B := A^{-1}$ ihre inverse Matrix.
- (2) Es gilt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$. Durch Transponieren erhält man $(A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = E_n$. Folglich ist A^T invertierbar, und die inverse Matrix zu A^T ist $(A^{-1})^T$.
- (3) Es gilt $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = E_n$ und $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = E_n$. Folglich ist $A \cdot B$ invertierbar, und die inverse Matrix von $A \cdot B$ ist $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

■

Den folgenden Satz werden wir erst später (als Satz ??) beweisen:

SATZ A.18. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $A \cdot B = E_n$. Dann ist A invertierbar. Ausserdem ist dann B die zu A inverse Matrix.

Wir berechnen jetzt die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

`In[112] := A = {{1, 3}, {2, -4}};`

`LinearSolve[A, {1, 0}]`

`Out[112] = {2/5, 1/5}`

Also $a = 0.4, c = 0.2$.

`In[113] := A = {{1, 3}, {2, -4}};`

`LinearSolve[A, {0, 1}]`

`Out[113] = {3/10, -1/10}`

Also $b = 0.3, d = -0.1$.

9.1. Das Berechnen von A^{-1} . Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sodass $A \cdot B = E_n$. Für die i -te Spalte b_i von B und die i -te Spalte e_i von E_n (dem i -ten Einheitsvektor) gilt dann $A \cdot b_i = e_i$.

Zum Bestimmen der Inversen einer $n \times n$ -Matrix A müssen wir also n lineare Gleichungssysteme

$$A \cdot x = e_i \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}$$

lösen. Weil die linke Seite dieser Gleichungssysteme immer gleich ist, brauchen wir das Eliminationsverfahren nur einmal anzuwenden, wenn wir alle verschiedenen rechten Seiten gleichzeitig behandeln. Wie das geht, zeigen wir an folgendem Beispiel:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Um Vektoren $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ zu finden, sodass $A \cdot b_i = e_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, bringen wir die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform. Wir erhalten

$$\begin{array}{cccccc} & & & e_1 & e_2 & e_3 \\ & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -3 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{15} & -\frac{5}{15} & -\frac{1}{15} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{15} & \frac{5}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{15} & -\frac{5}{15} & -\frac{1}{15} \\ & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Jetzt können wir die Lösungen aus der 4., 5. und 6. Spalte ablesen. Die Inverse von A existiert, und es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -6 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

In Mathematica berechnet die Funktion `Inverse` die inverse Matrix; die Funktion `^(-1)` macht leider etwas ganz anderes.

```
In[114] := A = {{1, 3}, {2, -4}};
```

```
B = Inverse[A];
```

```
MatrixForm[B]
```

$$\text{Out}[114] = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

In[115] := **A.B**

Out[115] = {{1, 0}, {0, 1}}

In[116] := **B.A**

Out[116] = {{1, 0}, {0, 1}}

In[117] := **A⁻¹**

Out[117] = {{1, $\frac{1}{3}$ }, { $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$ }}

In[118] := **A.A⁻¹**

Out[118] = {{ $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{12}$ }, {0, $\frac{5}{3}$ }}