KAPITEL 1

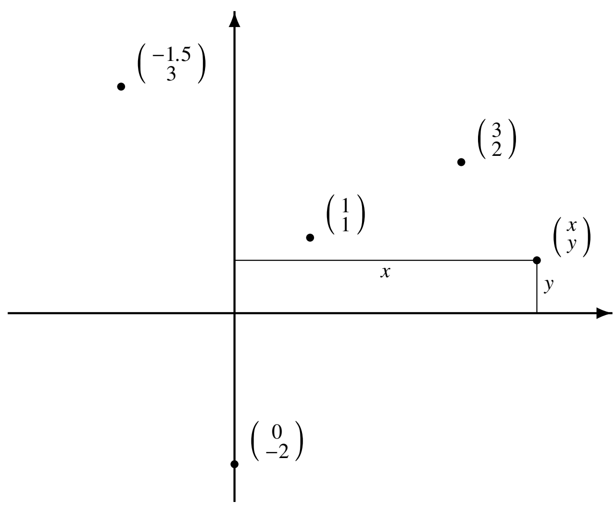
Geometrie in der Ebene und im Raum

1. Koordinaten

Wir beschreiben – nach einer Idee von René Descartes (1596 – 1650) – jeden Punkt in der Ebene durch ein Paar reeller Zahlen. Die Menge der Paare reeller Zahlen kürzen wir mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ ab.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}.$$

Für das Paar $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ schreiben wir auch (x, y). Aus der folgenden Skizze ist ersichtlich, wie wir jeden Punkt durch ein Zahlenpaar (seine *kartesischen Koordinaten*) beschreiben.



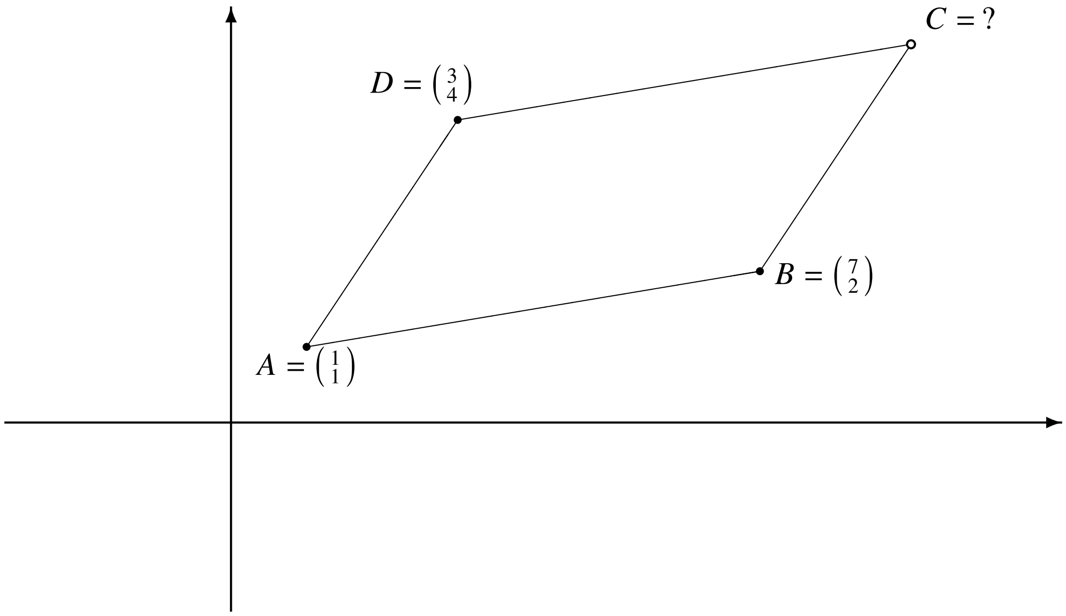
2. Vektoren

2.1. Addition von Vektoren. Wo liegt der Punkt C im Parallelogramm ABCD, dessen Punkte A, B und D durch

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ B = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \end{smallmatrix}\right),\ D = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$$

gegeben sind?

[0]Unterlagen zur Vorlesung Algebra von Erhard Aichinger, Peter Mayr. 3.10.2007.



Um von A nach B zu kommen, müssen wir 6 nach rechts und 1 nach oben gehen.

$$\vec{AB} = \binom{7}{2} - \binom{1}{1} = \binom{6}{1}.$$

Wenn wir von D starten und um 6 nach rechts und 1 nach oben gehen, landen wir bei C.

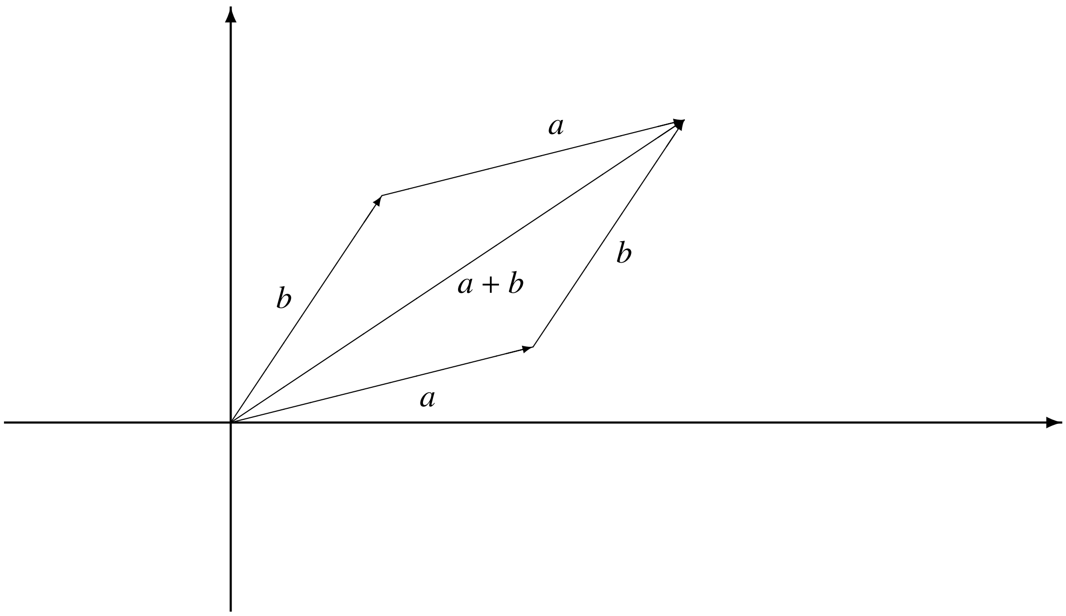
$$C = D + \vec{AB} = \binom{3}{4} + \binom{6}{1} = \binom{9}{5}.$$

Wir bemerken, dass wir ein Paar reeller Zahlen, wie etwa $\binom{6}{1}$, verwenden, um zwei verschiedene Dinge zu beschreiben:

- Den Punkt, der um 6 Längeneinheiten rechts und um 1 Längeneinheit über dem Punkt $\binom{0}{0}$ liegt.
- Den Weg (*Vektor*) von $\binom{1}{1}$ nach $\binom{7}{2}$.

DEFINITION 1.1. Für Vektoren $\binom{a_1}{a_2}$, $\binom{b_1}{b_2}$ in $\mathbb{R}^2$ definieren wir

$$\binom{a_1}{a_2} + \binom{b_1}{b_2} := \binom{a_1+b_1}{a_2+b_2}.$$



In Mathematica werden Vektoren als Listen dargestellt.

```
In[1]:= a = {1, 1};

In[2]:= b = {7, 2};

In[3]:= d = {3, 4};

In[4]:= ab = b - a
Out[4]= {6, 1}

In[5]:= c = d + ab
Out[5]= {9, 5}
```

3. Die Länge eines Vektors

Wir lösen folgendes Beispiel:

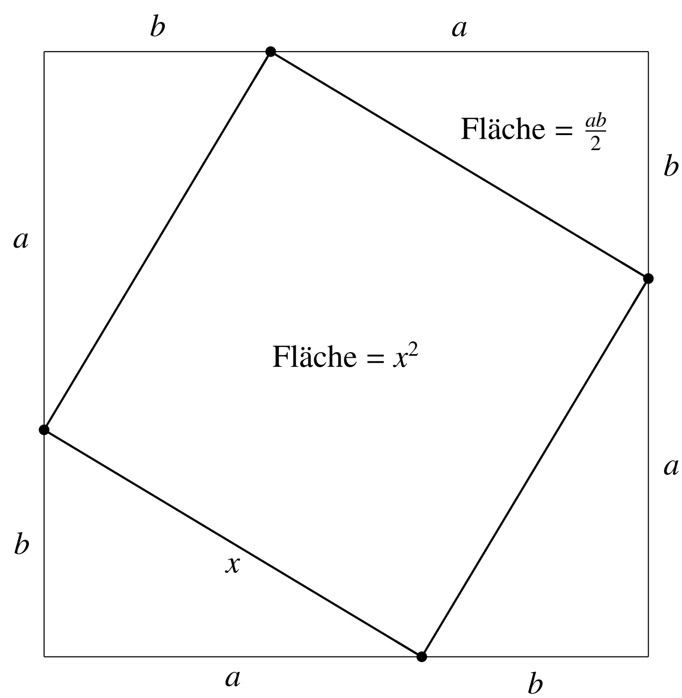
> Herr A geht von $\binom{3}{2}$ aus 1 Einheit in Richtung Südosten. Wo landet er?

"Richtung Südosten" heißt "in Richtung $\binom{1}{-1}$". Allerdings hat $\binom{1}{-1}$ die Länge $\sqrt{2} \approx 1.41421$. Daher hat $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \binom{1}{-1}$ die Länge 1 und zeigt auch in Richtung Südosten. Herr A landet also im Punkt Z, den wir uns mit

$$Z = \binom{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \binom{1}{-1} \approx \binom{3.7}{1.3}$$

ausrechnen.

Wir überlegen uns jetzt, wie lange der Vektor $\binom{a}{b}$ ist. Das heißt, wir wollen wissen, wie lange in einem Dreieck, in dem die Seiten mit den Längen a und b einen rechten Winkel einschließen, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist. Vergessen wir kurz unsere klassische Bildung, und zeichnen wir ein Quadrat mit Seitenlänge $a+b$. Wir unterteilen jede der vier Quadratseiten in ein Stück der Länge a und ein Stück der Länge b und verbinden die 4 Teilungspunkte. Das innere jetzt eingezeichnete Viereck ist ein Quadrat, da alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.



Das innere Viereck und die vier rechtwinkeligen Dreiecke ergeben zusammen die Fläche des großen Quadrats mit der Seitenlänge $a + b$, also gilt

$$x^2 + 4\frac{a\,b}{2} = (a+b)^2.$$

Das heißt

$$x^2 + 2\,a\,b = a^2 + 2\,a\,b + b^2,$$

also

$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Mit diesem Zusammenhang, dem Satz des Pythagoras (Pythagoras von Samos, 6. Jh. v. Chr), können wir die Länge x des Vektors $\binom{a}{b}$ ausrechnen.

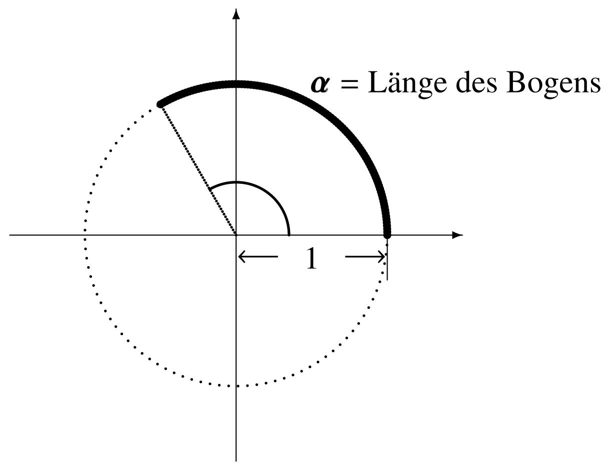
Definition 1.2. Wir kürzen die Länge (oder *Norm*) des Vektors $\binom{a}{b}$ mit $\|\binom{a}{b}\|$ ab. Es gilt dann

$$\|\binom{a}{b}\| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

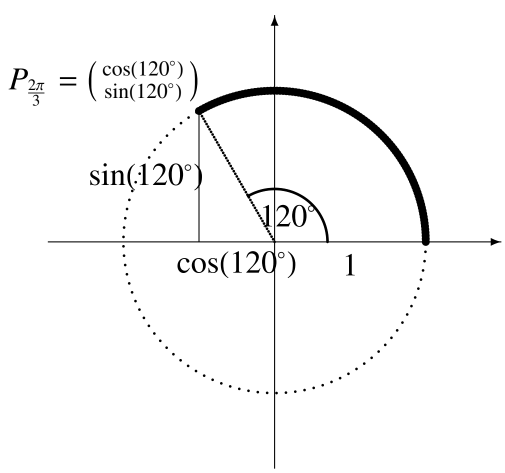
Bevor wir den Winkel, den zwei Vektoren einschliessen, berechnen, erinnern wir an einige Grundlagen der Trigonometrie

4.1. Winkel. Winkel misst man nicht nur in Grad (°), sondern auch in *Radiant* (rad). Dabei wird der Winkel durch die Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis, dem Kreis mit Radius 1, angegeben.



Dabei entsprechen 180° dem Winkel π rad. Demzufolge ist $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad , und 1 rad $\approx$ 57.2958°.

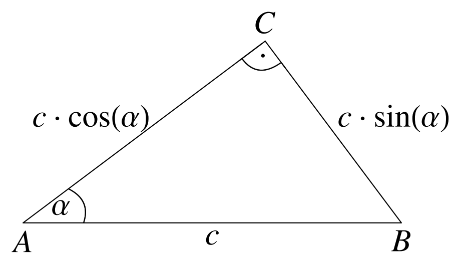
4.2. Winkelfunktionen.



Gegeben ist ein Winkel x. Der auf dem Kreis mit Mittelpunkt $\binom{0}{0}$ und Radius 1 liegende Punkt P_x hat dann die Koordinaten $\binom{\cos(x)}{\sin(x)}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für jeden Winkel x:

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

In einem rechtwinkeligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite auch *Hypotenuse*, die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten*.

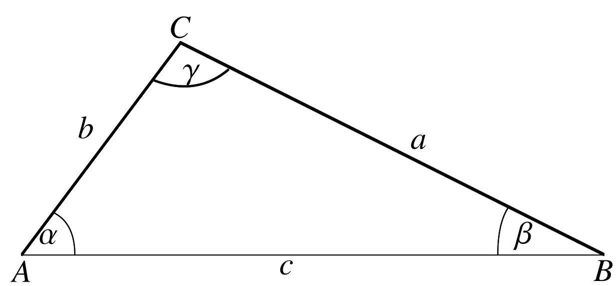


ÜBUNGSAUFGABEN 1.3.

(1) Ein Kletterer kann Wände mit einer Neigung von maximal 65° besteigen. Schafft er eine Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche von 784 m^2 und einer Höhe von 40 m?

4.3. Der Cosinussatz. Wir wollen folgendes Problem lösen:

- Gegeben: Seitenlängen a, b eines Dreiecks und der eingeschlossene Winkel γ.
- Gesucht: fehlende Seitenlänge c.



Wir betrachten zunächst den Fall $\gamma \leq 90°$, $\alpha \leq 90°$. Wir zeichnen in ein solches Dreieck die Höhe auf B und erhalten aus dem Satz des Pythagoras:

$$c^2 = (b - a\cos(\gamma))^2 + (a\sin(\gamma))^2,$$

also

$$\begin{aligned}
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2(\sin(\gamma))^2 + a^2(\cos(\gamma))^2 \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2\,((\sin(\gamma))^2 + (\cos(\gamma))^2) \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + 1\,a^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma).
\end{aligned}$$

Für den Fall $\gamma \leq 90^\circ$ und $\alpha > 90^\circ$ sowie für den Fall $\gamma > 90^\circ$ zeichnen wir ebenfalls die Höhe auf B und erhalten ebenfalls die Gleichung:

$$c^2 = (a\cos(\gamma) - b)^2 + (a\sin(\gamma))^2.$$

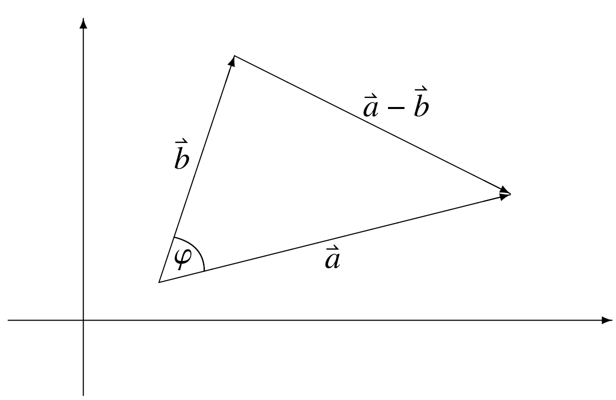
Mit den selben Umformungen in allen 3 Fällen haben wir insgesamt folgenden Satz bewiesen:

SATZ 1.4 (Cosinussatz). *Wir bezeichnen die Längen der Seiten eines Dreiecks mit a, b, c, und wir bezeichnen den der Seite mit Länge c gegenüber liegenden Winkel mit γ. Dann gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma).$$

Man findet mit dem Cosinussatz γ, wenn a, b und c gegeben sind. Zu jedem $k \in [-1, 1]$ gibt es genau ein $x \in [0, \pi]$, sodass $\cos(k) = c$.

4.4. Der Winkel zwischen zwei Vektoren. Wir berechnen den Winkel, den die Vektoren $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ miteinander einschließen. Dazu nehmen wir an, dass keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist.



Für den eingeschlossenen Winkel φ gilt nach dem Cosinussatz:

$$||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2\,||a||\,||b||\cos(\varphi) = ||b - a||^2.$$

Diese Formel können wir vereinfachen:

$$\begin{aligned}
2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\varphi) &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 \\
2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\varphi) &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 \\
2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\varphi) &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1^2 + 2\,a_1\,b_1 + a_1^2) - (b_2^2 + 2\,a_2\,b_2 + a_2^2) \\
2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\varphi) &= 2\,a_1\,b_1 + 2\,a_2\,b_2 \\
\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\varphi) &= a_1\,b_1 + a_2\,b_2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1\,b_1 + a_2\,b_2}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}.$$

Die Zahl $a_1\,b_1 + a_2\,b_2$ bezeichnet man als das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und man kürzt es mit $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ ab.

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Die Winkelformel heißt jetzt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}.$$

Außerdem gilt für jeden Vektor $\vec{a}$

$$\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = (\|a\|)^2.$$

```
In[6]:= {3, 4}.{-5, 2}
Out[6]= -7

In[7]:= Laenge[v_] := Sqrt[v.v]

In[8]:= Laenge[{2, 3}]
Out[8]= √13
```

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *stehen aufeinander normal*, wenn $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 0$. Damit erhält man, dass (wenn $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$) der Vektor $\binom{a}{b}$ mit den Vektoren $\binom{b}{-a}$ und $\binom{-b}{a}$ einen rechten Winkel einschließt.

Übungsaufgaben 1.5.

(1) Von einem gleichschenkeligen Dreieck sind zwei Basiseckpunkte $\binom{-2}{3}$ und $\binom{4}{11}$ bekannt. Ergänzen Sie diese Punkte mit einer Spitze, sodaß das entstehende Dreieck die Höhe 5 besitzt. Wie viele verschiedene Lösungen gibt es? (Sie brauchen nur eine wirklich auszurechnen.)

(2) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen x und y für $x = \binom{3}{2}$, $y = \binom{-6}{-4}$.

(3) Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen folgenden beiden Vektoren. Geben Sie die Ergebnisse in Grad und in Radiant an !
   (a) $a = \binom{3}{2}$, $b = \binom{-3}{2}$.
   (b) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{4}{-3}$.
   (c) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{6}{8}$.
   (d) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{-9}{-12}$.

(4) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften erfüllt:
   (a) $\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle$.

(b) $\langle a+b, a-b\rangle = \langle a,a\rangle - \langle b,b\rangle$.

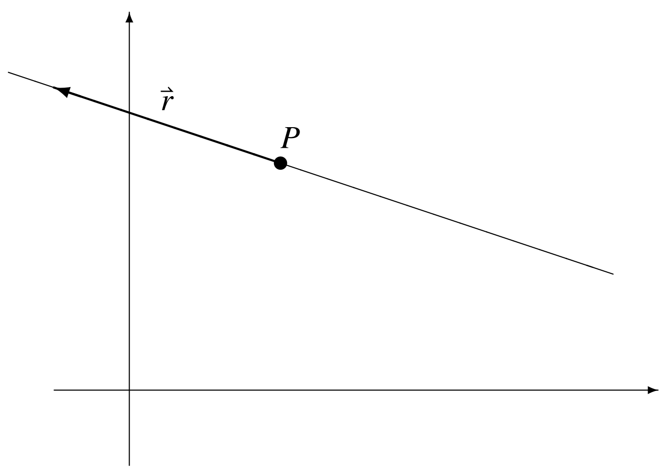
(5) Verwenden Sie das Skalarprodukt, um folgenden geometrischen Satz zu beweisen.
In einem Parallelogramm mit Seitenlängen a, b, und Diagonalenlängen e, f gilt:

$$2\,(a^2+b^2) = e^2 + f^2.$$

5. Geraden in der Ebene

Wir überlegen uns, wie man Geraden in der Ebene beschreiben kann.

5.1. Geraden, die durch einen Punkt und eine Richtung gegeben sind.



$P = \binom{2}{3}$, $\vec{r} = \binom{-3}{1}$.

Die Gerade g ist die Menge aller Punkte, die man erreicht, indem man von P ein Stück in Richtung $\vec{r}$ geht.

$$g = \{P + \lambda\cdot\vec{r}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Lies: “g ist gleich der Menge aller Punkte $P+\lambda$ mal $\vec{r}$, wobei λ eine reelle Zahl ist.” Mit den Zahlen für P und $\vec{r}$:

$$g = \{\tbinom{2}{3} + \lambda\cdot\tbinom{-3}{1}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\},$$

oder, anders geschrieben,

$$g = \{\tbinom{2-3\lambda}{3+\lambda}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Man kann g auch so schreiben:

$$g = \{\tbinom{x}{y}\in\mathbb{R}^2\,|\text{ es gibt }\lambda\in\mathbb{R},\text{ sodass }\tbinom{x}{y} = \tbinom{2}{3} + \lambda\cdot\tbinom{-3}{1}\}.$$

Lies: “g ist gleich der Menge aller Punkte $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}$ hoch 2, für die es ein λ in den reellen Zahlen gibt, sodass $\binom{x}{y}$ gleich $\binom{2}{3}$ + λ mal $\binom{-3}{1}$ ist.” Diese Darstellung von g durch *Punkt* und *Richtungsvektor* heißt *Parameterdarstellung der Gerade g*. Man schreibt oft kurz:

$$g : \tbinom{x}{y} = \tbinom{2}{3} + \lambda\cdot\tbinom{-3}{1}$$

oder

$$g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}.$$

Wir überprüfen, ob der Punkt $\binom{-4}{5}$ auf der Geraden g liegt. Er liegt auf g, falls es eine reelle Zahl λ gibt, sodass $\binom{-4}{5}$ gleich $\binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$ ist. Wir suchen also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, das die Gleichungen

$$\begin{aligned} -4 &= 2 - 3\lambda \qquad \mathrm{I} \\ 5 &= 3 + 1\lambda \qquad \mathrm{II} \end{aligned}$$

erfüllt. Aus der Gleichung I erhalten wir $\lambda = 2$; da auch $5 = 3 + 1 \cdot 2$ gilt, ist $\lambda = 2$ eine Lösung des Gleichungssystems. Daher liegt der Punkt $\binom{-4}{5}$ auf g; wir schreiben dafür

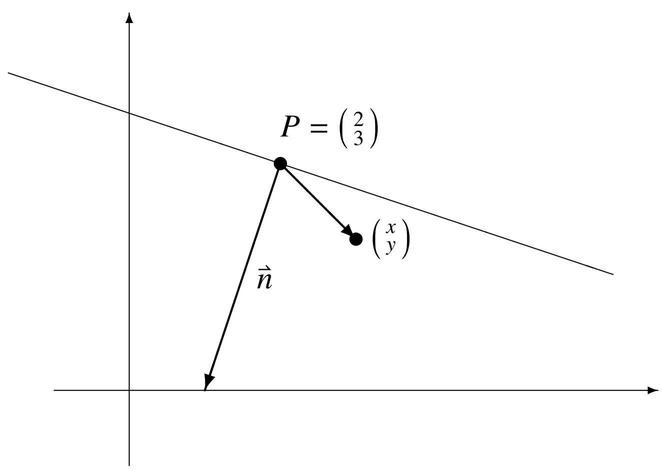
$$\binom{-4}{5} \in g.$$

5.2. Geraden, die durch eine Gleichung gegeben sind. Wir haben im letzten Beispiel überprüft, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Dabei war die Gerade in Parameterform gegeben. Zur Überprüfung war es notwendig, festzustellen, ob es einen Wert für den Parameter λ gibt, der uns genau den getesteten Punkt liefert. Wir mussten also für jeden Punkt ein Gleichungssystem (mit zwei Gleichungen und einer Variable) lösen.

Wir testen nun wieder, ob $\binom{x}{y}$ auf der Geraden g liegt, die durch

$$g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$$

gegeben ist.



Anstatt zu fragen, ob $\binom{x}{y}$ auf g liegt, fragen wir, ob $\binom{x}{y} - \binom{2}{3}$ normal auf $\vec{n}$ steht. Das ist nämlich genau für die Punkte $\binom{x}{y}$ auf g der Fall. Zunächst finden wir den Vektor $\vec{n}$. Auf den Vektor $\binom{a}{b}$ steht immer der Vektor $\binom{-b}{a}$ normal, denn das Skalarprodukt $\langle \binom{a}{b}, \binom{-b}{a} \rangle$ ergibt $-a\,b + a\,b = 0$. Also finden wir $\vec{n}$ durch

$$\vec{n} = \binom{-1}{-3}.$$

Nun überprüfen wir, ob $\binom{x}{y} - \binom{2}{3}$ normal auf $\binom{-1}{-3}$ steht. Das gilt genau dann, wenn

$$\langle \binom{x-2}{y-3}, \binom{-1}{-3} \rangle = 0.$$

Wir rechnen das Skalarprodukt aus und erhalten

$$-x - 3\,y + 11 = 0.$$

Ein Punkt $\binom{x}{y}$ liegt also genau dann auf der Geraden, wenn $-x - 3\,y + 11 = 0$ ist. Wir können also jetzt viel einfacher überprüfen, ob ein Punkt auf der Geraden g liegt. Wir berechnen $-x - 3\,y + 11$. Ist das 0, so liegt der Punkt auf der Geraden, und sonst nicht. Außerdem können wir die Gerade jetzt kürzer angeben durch

$$g = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -x - 3\,y = -11\}$$

(lies: "g ist gleich der Menge aller $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}$ hoch 2, für die $-x - 3\,y$ gleich -11 ist.") Das kürzt man auch zu

$$g : -x - 3\,y = -11$$

ab. $-x - 3\,y = -11$ heißt *Gleichung* der Geraden, diese Darstellung der Geraden *Gleichungsform* oder *implizite Darstellung* der Geraden.

5.3. Verwandlung zwischen Gleichungs- und Parameterform.

5.3.1. *Verwandlung von parametrisierter in implizite Darstellung.* Wir verwandeln $g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$ in $g : -x - 3\,y = -11$ so, wie das in obigem Beispiel erklärt worden ist.

5.3.2. *Verwandlung von impliziter in parametrisierte Form.* Wir verwandeln $g : 5\,x - 2\,y = 1$ in parametrisierte Form. Dazu setzen wir $y := t$ und rechnen uns aus diesem y das x aus. Wir erhalten $x = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,t$. Somit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Punkt $\binom{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}t}{t}$ ein Geradenpunkt. Die Gerade hat also die parametrisierte Darstellung

$$g : X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine andere Darstellung derselben Geraden ist

$$g : X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \binom{2}{5},$$

oder

$$g : X = \binom{1}{2} + t \cdot \binom{-22}{-55}.$$

Spezialfall: Wir verwandeln $g : y = -1$ in Parameterform. Dazu setzen wir $x := t$, und rechnen uns dann y aus. Das ist aber immer -1. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist also $\binom{t}{-1}$ ein Geradenpunkt. Die Gerade hat die parametrisierte Darstellung

$$g : X = \binom{0}{-1} + t \cdot \binom{1}{0}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 1.6.

(1) Geben Sie die Gerade durch die Punkte $\binom{3}{2}$ und $\binom{3}{-3}$ in Parameterform und in impliziter Form an!
(2) Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform (= Punkt-Richtungs-Form) folgender Geraden.

(a) $3x + 4y = 17$.
(b) $x = 1$.
(c) $y = -4$.

(3) Bestimmen Sie eine Gleichung, deren Lösungsmenge die Gerade

$$X = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist.

(4) Bestimmen Sie die implizite Darstellung jener Geraden, die parallel zur Geraden g mit

$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sind und von dieser Abstand 10 haben.

(5) Ein Radfahrer startet im Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und fährt auf den Punkt $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu. Ein Fußgänger startet im Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und geht auf den Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ zu. In welchem Punkt schneiden sich die Wege der beiden?

(6) Ein Radfahrer im Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und ein Fußgänger im Punkt $\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$ bewegen sich aufeinander zu, der Radfahrer mit 20 km/h, der Fußgänger mit 5 km/h. Wann und wo treffen die beiden einander?

(7) Vom Quadrat $ABCD$ haben wir folgende Angaben:
- $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- B liegt auf der Geraden
$$g_B : X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
- Die Seitenlänge des Quadrats ist 10.
- Die Eckpunkte sind gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C, D beschriftet.

Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C!

(8) Vom Quadrat $ABCD$ haben wir folgende Angaben:
- $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- B liegt auf der Geraden
$$g_B : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
- Die Seitenlänge des Quadrats ist 15.
- Die Eckpunkte sind gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C, D beschriftet.

Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C!

(9) Zeigen Sie, dass sich die Schwerlinien des Dreiecks ABC mit $A = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie diesen Schnittpunkt.

(10) Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ des Dreiecks ABC mit $A = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, indem Sie die Bedingung, dass U gleich weit von A, B und C entfernt ist, in Gleichungen in den Variablen u_1 und u_2 umwandeln. Verwenden Sie zur Lösung der auftretenden Gleichungen den Mathematica-Befehl `Solve`.

(11) Berechnen Sie den Durchschnitt der Geraden h und j, wobei

$$h : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$j : 10x - 4y = 0.$$

(12) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Geraden

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : 2x + 4y = 22.$$

(13) Bestimmen Sie den Cosinus des Schnittwinkels der Geraden

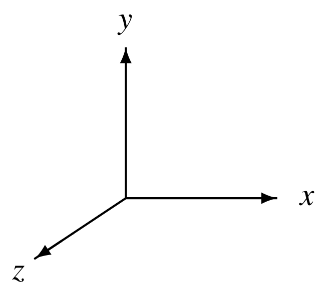
$$g_1 : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : 12x - 5y = 22.$$

6. Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Bisher haben wir uns auf die Geometrie in der Ebene beschränkt. Analog kann man den Raum mit Tripeln reeller Zahlen, also mit Elementen aus $\mathbb{R}^3$, koordinatisieren. Die Konvention ist es, die Richtungen der Koordinatenachsen wie in folgender Skizze zu wählen.



Hält man Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so, dass sie paarweise im rechten Winkel aufeinander stehen, dann zeigen sie jeweils in die Richtung der positiven x-Achse, y-Achse und z-Achse.

Wir definieren die Operationen, die im $\mathbb{R}^2$ hilfreich waren, allgemein für

$$\mathbb{R}^n := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Definition 1.7. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren:

(1) $\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$.
(2) $\lambda\vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle := a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$ (Skalarprodukt).
(4) $\|\vec{a}\| := \sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle}$ (Länge).
(5) Der Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}.$$

6.1. Das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$. Wir beginnen mit einer vorerst unmotivierten Definition und zeigen dann einige ihrer nützliche Eigenschaften.

Definition 1.8. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ -(a_1b_3-a_3b_1) \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

ist das *Kreuzprodukt* von $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^3$.

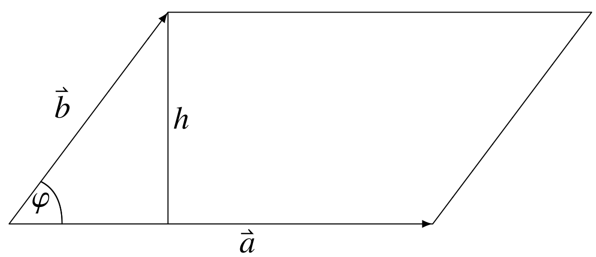
Für $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^3$ gilt:

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ ist normal auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$.
Beweis. Es gilt

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 = 0.$$

■

(2) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ ist die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
Beweis.



Wir erhalten für die Höhe h auf $\vec{a}$

$$h = \|\vec{b}\| \sin(\varphi)$$

und für den Flächeninhalt

$$F = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\varphi).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} F^2 &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 (\sin(\varphi))^2, \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 (1 - (\cos(\varphi))^2), \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2. \end{aligned}$$

Einsetzen von $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$ für $\vec{a}$ und $\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$ für $\vec{b}$ ergibt jetzt

$$F^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2.$$

■

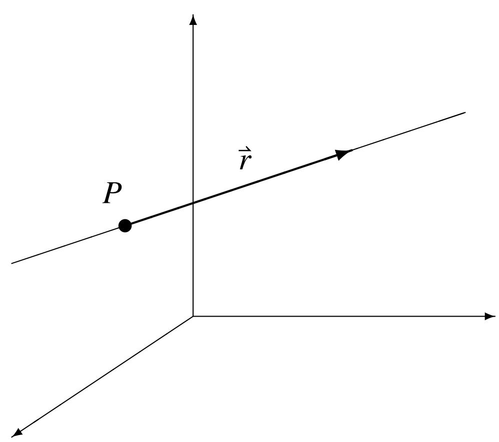
Durch diese beiden Bedingungen an Richtung und Länge ist der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ fast schon eindeutig bestimmt. Zusätzlich gilt: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung $\vec{a}$, der Zeigefinger in Richtung $\vec{b}$, und ist der Mittelfinger normal auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, dann zeigt er in die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$.

```
In[9]:= Kreuzprodukt[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}] :=
         {a2 * b3 - a3 * b2, -(a1 * b3 - a3 * b1), a1 * b2 - a2 * b1}

In[10]:= Kreuzprodukt[{1, -2, 3}, {0, 2, -1}]

Out[10]= {-4, 1, 2}
```

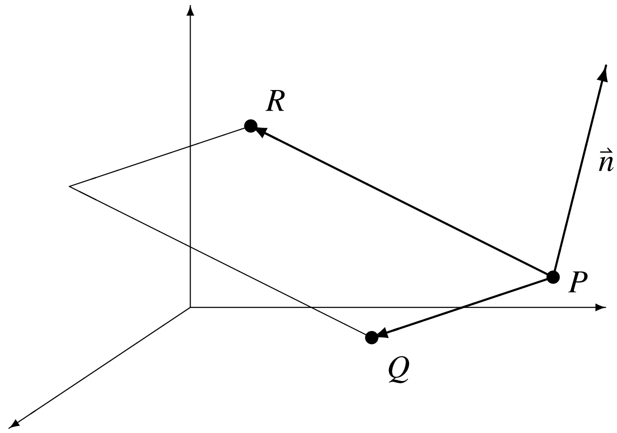
7. Geraden und Ebenen im Raum

7.1. Parameterdarstellung einer Geraden. Genau wie im $\mathbb{R}^2$ lässt sich eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch eine Parameterdarstellung mit einem Punkt und einem Richtungsvektor angeben. Zum Beispiel,

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



7.2. Parameterdarstellung einer Ebene. Wie kann man die Ebene e beschreiben, die die drei Punkte $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ enthält?



Die Ebene e ist die Menge aller Punkte, die man erreicht, indem man etwa von P aus ein Stück in Richtung auf den Punkt Q und ein Stück in Richtung auf den Punkt R zu geht.

$$e = \{P + \lambda \cdot \vec{PQ} + \mu \cdot \vec{PR} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

das heisst, die Punkte der Ebene sind von der Form

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Eine Ebene lässt sich also durch einen Punkt und 2 Richtungsvektoren beschreiben.

7.3. Implizite Darstellung einer Ebene. Es sei e die Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, die normal auf den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist. Wir nennen $\vec{n}$ den Normalvektor von e.

Die Ebene e ist die Menge aller Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sodass der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ normal auf $\vec{n}$ ist, also

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Einsetzen der Werte ergibt die *implizite Darstellung der Ebene*,

$$e = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = -9\}.$$

Ein Normalvektor von e lässt sich direkt aus den Koeffizienten der Ebenengleichung ablesen.

7.3.1. *Verwandlung von Parameterdarstellung in implizite Darstellung.* Wir verwandeln

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in implizite Form Dazu suchen wir zuerst einen Vektor $\vec{n}$, der auf beide Richtungsvektoren der Ebene normal ist. Dann ist $\vec{n}$ auf die ganze Ebene normal. Wir beschreiben 2 Möglichkeiten einen solchen Normalvektor zu finden:

(1) Wir suchen $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ so, dass

$$\begin{aligned} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle &= 0 \text{ und} \\ \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Das heisst, wir müssen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 + 3n_3 &= 0 \\ 2n_1 - n_2 - 3n_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Klarerweise ist $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ eine Lösung, aber wir wollen einen Vektor $\vec{n}$, der nicht der Nullvektor ist. Wie man alle Lösungen eines linearen Gleichungssystems findet, werden wir im nächsten Kapitel sehen.

(2) Alternativ finden wir $\vec{n}$ auch als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{n}$ ist normal auf die Ebene. Ein Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liegt also genau dann in e, wenn der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal auf $\vec{n}$ ist. Wir berechnen

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle = 0$$

und erhalten

$$6x + 9y + z = 38.$$

Somit hat die Ebene e die implizite Darstellung

$$e = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 6x + 9y + z = 38\}.$$

7.3.2. *Verwandlung von impliziter Darstellung in Parameterdarstellung.* Wir verwandeln $e : x + 3y - 2z = -9$ in parametrisierte Form. Wir beschreiben die Lösungsmenge der Gleichung, indem wir $z = \mu$ und $y = \lambda$ setzen und dann x durch λ und μ ausdrücken. Wir erhalten $x = -9 - 3\lambda + 2\mu$. Somit liegt für alle Werte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ der Punkt $\begin{pmatrix} -9-3\lambda+2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ in der Ebene. Die Ebene hat also die parametrisierte Darstellung

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.4. Implizite Darstellung einer Geraden. Offenbar kann man eine Gerade im Raum nicht durch eine einzige lineare Gleichung in x, y, z beschreiben. Solche Gleichungen beschreiben nämlich Ebenen im Raum. Jede Gerade kann man aber implizit als Schnitt zweier Ebenen, d.h., als Lösungsmenge von 2 linearen Gleichungen beschreiben. Beispielsweise ist

$$g = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 1, x + 4y - 2z = 3\}.$$

die Gerade, die sowohl in der Ebene mit der Gleichung $2x - y + 3z = 1$ als auch in der Ebene mit der Gleichung $x + 4y - 2z = 3$ liegt.

Zwei Ebenen im Raum, die nicht parallel sind, schneiden sich immer in einer Geraden. Parallele Ebenen erkennt man daran, dass ihre Normalvektoren in dieselbe Richtung zeigen. Also sind etwa $2x - y + 3z = 1$ und $-4x + 2y - 6z = 3$ parallel.

7.4.1. *Verwandlung von Parameterdarstellung in implizite Darstellung.* Wir verwandeln

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in implizite Form. Dazu suchen wir 2 Ebenen, die die Gerade enthalten. Liegt g in einer Ebene mit Normalvektor $\vec{n}$, dann ist $\vec{n}$ normal auf den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Geraden. Zusätzlich liegt der Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in der Ebene.

Auf einen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sind beispielsweise $\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$ normal. Wir wählen $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $n_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Vektoren, die im rechten Winkel auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ stehen. Damit liegt g in den Ebenen durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, die normal auf n_1 bzw. n_2 sind. Die Gerade ist also der Durchschnitt der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} e_1 : &\quad x + y = 5, \text{ und} \\ e_2 : &\quad 3x - z = 7. \end{aligned}$$

Wir haben

$$g = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 5, 3x - z = 7\}.$$

7.4.2. *Verwandlung von impliziter Darstellung in Parameterdarstellung.* Um eine Parameterdarstellung von

$$g = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 1, x + 4y - 2z = 3\}$$

zu erhalten, lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1, \\ x + 4y - 2z &= 3. \end{aligned}$$

Eine Methode dafür werden wir im nächsten Kapitel vorstellen.