

## KAPITEL 2

# Lineare Gleichungssysteme

### 1. Beispiele

Wir betrachten zunächst vier Gleichungssysteme und bestimmen ihre Lösungsmenge. Dabei geht es uns noch nicht darum, ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme zu entwickeln (das kommt später), sondern nur darum, ein paar typische Phänomene zu beobachten.

- (1) Man bestimme alle Paare  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$ , die sowohl die Gleichung  $x + y = -1$  als auch die Gleichung  $3x + 2y = -5$  erfüllen. Wir suchen also alle Lösungen des Gleichungssystems

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x + y &= -1 & (1) \\ 3x + 2y &= -5 & (2). \end{aligned}$$

*Lösung:* Wenn  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt  $x + y = -1$ . Daher gilt auch  $-3x - 3y = 3$ . Somit ist jede Lösung des Systems (2.1) auch eine Lösung von

$$(2.2) \quad \begin{aligned} -3x - 3y &= 3 & (1') \\ 3x + 2y &= -5 & (2). \end{aligned}$$

Wenn  $-3x - 3y = 3$  und  $3x + 2y = -5$ , dann gilt auch  $(-3x - 3y) + (3x + 2y) = 3 + (-5)$ , also  $-y = -2$ . Daher muss  $y = 2$  sein. Da aber  $x + y = -1$  ist, muss  $x = -1 - y$  sein, und daher ist  $x = -3$ . Daher ist nur  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  als Lösung des Gleichungssystems möglich.

Wir probieren nun aus, ob  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  auch wirklich eine Lösung ist. Tatsächlich gilt  $-3 + 2 = -1$  und  $3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = -5$ . Daher ist die Menge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Jene Punkte  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^2$ , die die Gleichung  $x + y = -1$  erfüllen, liegen auf einer Geraden (eben auf der Geraden mit Gleichung  $x + y = -1$ ). Jene Punkte  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , die die Gleichung  $3x + 2y = -5$  erfüllen, liegen auf der Geraden mit Gleichung  $3x + 2y = -5$ . Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält alle Punkte, die auf

---

<sup>0</sup>Unterlagen zur Vorlesung Algebra von Erhard Aichinger, Peter Mayr. Alle Rechte vorbehalten.  
11.10.2007.

beiden Geraden liegen. Wenn die beiden Geraden nicht parallel sind, so gibt es genau einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt, nämlich den Schnittpunkt der beiden Geraden. Dieser Schnittpunkt ist in diesem Beispiel der Punkt  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

(2) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x + 3y &= -1 & (1) \\ -3x - 9y &= 2 & (2). \end{aligned}$$

*Lösung:* Wenn  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt  $x + 3y = -1$ . Daher gilt auch  $3x + 9y = -3$ . Somit ist jede Lösung des Systems (2.3) auch eine Lösung von

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 3x + 9y &= -3 & (1') \\ -3x - 9y &= 2 & (2). \end{aligned}$$

Wenn  $3x + 9y = -3$  und  $-3x - 9y = 2$ , dann gilt auch

$$(2.5) \quad (3x + 9y) + (-3x - 9y) = -3 + 2.$$

Die linke Seite von (2.5) ist aber immer 0. Jede Lösung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  des Gleichungssystems (2.3) muss also  $0 = -3 + 2$ , also  $0 = -1$  erfüllen. Egal welche  $x, y$  man in die Gleichung (2.5) einsetzt: die Gleichung (2.5) kann nie erfüllt sein.

Somit hat das Gleichungssystem (2.3) keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge, also

$$L = \{\} = \emptyset.$$

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Die Gerade  $x + 3y = -1$  hat den Normalvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Die Gerade  $-3x - 9y = 2$  hat den Normalvektor  $\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$ . Der Vektor  $\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$  ist ein Vielfaches des Vektors  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Die beiden Geraden sind also parallel. Zwei parallele Geraden sind entweder identisch, oder sie haben keinen gemeinsamen Punkt. Da das Gleichungssystem (2.3) unlösbar ist, haben die beiden Geraden keinen gemeinsamen Punkt; sie sind also zwei verschiedene parallele Geraden.

(3) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$(2.6) \quad \begin{aligned} x + 5y &= -4 & (1) \\ -2x - 10y &= 8 & (2). \end{aligned}$$

*Lösung:* Wenn  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt  $x + 5y = -4$ . Daher gilt auch  $2x + 10y = -8$ . Somit ist jede Lösung des Systems (2.6) auch eine Lösung von

$$(2.7) \quad \begin{aligned} 2x + 10y &= -8 & (1') \\ -2x - 10y &= 8 & (2). \end{aligned}$$

Wenn  $2x + 10y = -8$  und  $-2x - 10y = 8$ , dann gilt auch

$$(2.8) \quad (2x + 10y) + (-2x - 10y) = -8 + 8.$$

Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung (2.8) ist also 0. Somit ist die Gleichung (2.8) für alle  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^2$  erfüllt. Sie liefert also keine Einschränkung für die Lösungen.

Nicht jeder Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^2$  ist eine Lösung des Systems (2.6). (Der Punkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  erfüllt nicht einmal die erste Gleichung.) Wir sehen aber, dass jede Lösung der ersten Gleichung von (2.6) auch eine Lösung der zweiten Gleichung von (2.6) ist: das liegt daran, dass die zweite Gleichung entsteht, wenn man beide Seiten der ersten Gleichung mit  $-2$  multipliziert. Man kann also die zweite Gleichung einfach weglassen (sie liefert keine weitere Einschränkung für  $x$  und  $y$ ), und nur mehr die Lösungen von

$$x + 5y = -4$$

bestimmen. Wir sehen, dass wir für jeden Wert, den wir für  $y$  vorgeben, einen Wert für  $x$  erhalten. Wenn wir für  $y := t$  setzen, erhalten wir für  $x$  den Wert  $x = -4 - 5t$ . Somit können wir die Lösungsmenge  $L$  so angeben:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -4-5t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Lösungsmenge  $L$  ist also eine Gerade durch  $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Die Gleichungen  $x + 5y = -4$  und  $-2x - 10y = 8$  werden von denselben  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  erfüllt. Sie beschreiben also die gleiche Gerade. Der Schnitt dieser beiden Geraden miteinander ist also genau diese eine Gerade. Und wirklich:  $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist genau die Parameterdarstellung der Geraden  $x + 5y = -4$ .

(4) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$(2.9) \quad \begin{aligned} 3x + 4y &= -1 & (1) \\ 5x + 10y &= -5 & (2) \\ 2x + 8y &= -6 & (3). \end{aligned}$$

*Lösung:* Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit 5, und die Gleichung (2) mit  $-3$  und erhalten

$$(2.10) \quad \begin{aligned} 15x + 20y &= -5 & (1') \\ -15x - 30y &= 15 & (2') \\ 2x + 8y &= -6 & (3). \end{aligned}$$

Jede Lösung von (1') und (2') erfüllt auch

$$(15x + 20y) + (-15x - 30y) = -5 + 15,$$

also  $-10y = 10$ , und somit  $y = -1$ . Wenn  $y = -1$ , dann muss wegen der Gleichung (1) gelten:

$$3x = -1 - 4y,$$

also  $3x = -1 + 4$ , und somit  $x = 1$ .

Die Frage ist, ob  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  auch wirklich eine Lösung des Gleichungssystems ist. Wir haben bis jetzt ja nur so begründet, dass für jede Lösung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  des Gleichungssystems  $x = 1$  und  $y = -1$  gelten muss. Wir wissen aber noch nicht, ob  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt. So haben wir etwa die Gleichung (3) beim Ausrechnen von  $x$  und  $y$  noch gar nicht verwendet! Wir müssen also ausprobieren, ob  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  wirklich alle drei Gleichungen erfüllt. Es gilt  $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -1$ ,  $5 \cdot 1 + 10 \cdot (-1) = -5$  und  $2 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) = -6$ . Das Paar  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  erfüllt also wirklich alle drei Gleichungen, und es gilt somit

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Von den drei Geraden, die durch die Gleichungen (1), (2) und (3) beschrieben werden, sind keine zwei parallel, da kein Normalvektor ein Vielfaches eines anderen Normalvektors ist. Alle drei Geraden gehen durch den Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Die drei Geraden gehen also "sternförmig" durch den Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Das Gleichungssystem (2.6) zeigt, dass die Lösungsmenge  $L$  eines linearen Gleichungssystems nicht leer oder einelementig sein muss, sondern auch eine unendliche Menge sein kann. Für die Darstellung der Lösungsmenge  $L$  des Systems (2.6) gibt es zwei Möglichkeiten:

- (1) *Implizite Darstellung* der Lösung: Jedes Paar  $(x, y)$ , das  $x + 5y = -4$  erfüllt, ist auch eine Lösung für das gesamte Gleichungssystem. Die Lösung kann also in der Form

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y = -4\}$$

geschrieben werden.

- (2) *Parametrisierte Darstellung* der Lösung: Wir können die Lösungsmenge als

$$L = \{(-4, 0) + t \cdot (-5, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

schreiben.

Wollen wir nun überprüfen, ob das Paar  $(3, 4)$  in der Lösungsmenge liegt, so müssen wir bei impliziter Darstellung nur  $x = 3$  und  $y = 4$  in  $x + 5y$  einsetzen. Da wir dabei 23 und nicht  $-4$  erhalten, folgt  $(3, 4) \notin L$ . Bei parametrisierter Darstellung müssen wir dazu das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4 - 5t &= 3 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

lösen. Aus der Tatsache, dass dieses System keine Lösung besitzt, können wir  $(3, 4) \notin L$  schließen.

Die implizite Darstellung lässt jedoch keine direkte geometrische Interpretation zu, während man aus der parametrisierten Darstellung sofort erkennt, dass es sich bei der Lösungsmenge um eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$  mit der Steigung  $-\frac{1}{5}$  handelt.

Wir werden uns überlegen, wie wir die Lösungsmenge von einer Darstellungsform in die andere umrechnen können. Die jeweiligen Übergänge nennt man *Parametrisieren* (*Lösen*) bzw. *Implizitisieren*.

## 2. Matrizen

Wir haben bereits *Vektoren* kennen gelernt; solche Tupel reeller Zahlen haben wir benutzt, um Punkte in der Ebene und im Raum zu beschreiben. In der Geometrie brauchen wir auch *Matrizen*. Matrizen eignen sich besonders gut, um etwa Drehungen oder Spiegelungen zu beschreiben, oder um lineare Gleichungssysteme übersichtlich anzuschreiben.

**2.1. Die Definition von Matrizen.** Wir tabellieren die Koeffizienten von  $x$ ,  $y$  und  $z$  in folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 0 \\ x + 5y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein rechteckiges Zahlenschema (eine *Matrix*)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

mit 2 Zeilen und 3 Spalten.

Eine Matrix mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten bezeichnen wir als eine  $m \times n$ -Matrix. Wenn  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix ist, und  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so bezeichnen wir mit  $A(i, j)$ ,  $A[i, j]$  oder  $A_{i,j}$  den Eintrag, der bei  $A$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte steht. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt zum Beispiel  $A_{2,1} = 7$ . Die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen kürzen wir mit  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ab.

BEISPIELE 2.1.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  ist eine  $2 \times 3$ -Matrix.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  ist eine  $2 \times 2$ -Matrix.
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine  $2 \times 1$ -Matrix.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$  ist eine  $1 \times 3$ -Matrix.

Wir müssen noch den Begriff “rechteckiges Zahlenschema” klären. Man kann eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  mit Einträgen aus  $\mathbb{R}$  als Funktion von  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  nach  $\mathbb{R}$  definieren. Der Eintrag, der in der 2. Zeile und 4. Spalte steht, ist dann der Funktionswert  $A(2, 4)$ . Diese Sichtweise gibt auch recht gut wieder, was eine Implementation

des abstrakten Datentyps “Matrix” können muss. Es muss möglich sein, eine Funktion `LiefereEintrag` zu schreiben, sodass `LiefereEintrag (A, i, j)` den Eintrag von  $A$  an der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte, also den Funktionswert  $A(i, j)$ , zurückgibt.

In Mathematica geben wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

wie folgt ein.

`In[11] := A = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}`

`Out[11] = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}`

`In[12] := MatrixForm[A]`

`Out[12] =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$`

`In[13] := A = {{5, 7, 8}, {-2, 3, 5}}`

`Out[13] = {{5, 7, 8}, {-2, 3, 5}}`

`In[14] := MatrixForm[A]`

`Out[14] =  $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$`

`In[15] := A[[2]][[1]]`

`Out[15] = -2`

**2.2. Die Multiplikation von Matrizen und Vektoren.** Wir erklären die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor zuerst an einem Beispiel. Sei  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Dann ist der Vektor  $A \cdot v$  gegeben durch

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor im  $\mathbb{R}^3$ .

**DEFINITION 2.2.** Wenn man eine  $m \times n$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit einem Vektor  $v$  aus  $\mathbb{R}^n$  multipliziert, so ist das Produkt  $w$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^m$ . Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  ist der  $i$ -te Eintrag von  $w$  das Skalarprodukt aus der  $i$ -ten Zeile von  $A$  und von  $v$ .

Dass diese Art der Multiplikation “Matrix mal Vektor” sinnvoll ist, werden wir später im Zusammenhang mit lineare Abbildungen wieder sehen. Jetzt ist sie schon einmal gut dazu, um lineare Gleichungssysteme übersichtlicher anzuschreiben.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 2z &= 1 \\ 5y - 8z &= 2 \end{aligned}$$

wird zu

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Im allgemeinen erhält man bei  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten die Form

$$A \cdot x = b,$$

wobei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix ist,  $x$  ein Vektor im  $\mathbb{R}^n$  und  $b$  ein Vektor im  $\mathbb{R}^m$ .

Die Funktion `LinearSolve[A, b]` liefert eine Lösung des linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = b$ .

Wir lösen zum Beispiel  $2x - 3y = 5$ .

```
In[16] := LinearSolve[{{2, -3}}, {5}]
```

```
Out[16] = {5/2, 0}
```

Bald werden wir sehen, wie man alle Lösungen erhält.

### 3. Die Lösung von Gleichungssystemen in Staffelform

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(2.11) \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem können wir so lösen:  $x_5$  können wir beliebig festlegen. Wir setzen also

$$x_5 = t.$$

Wir erhalten

$$-16x_4 + 8t = 16,$$

also

$$x_4 = -1 + \frac{1}{2}t.$$

Da  $x_3$  frei wählbar ist, setzen wir  $x_3$  auf  $s$ .

Dann erhalten wir

$$x_2 = 5 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5,$$

also

$$x_2 = 5 + 2s - 4 + 2t - 2t$$

$$x_2 = 1 + 2s.$$

Schließlich

$$x_1 = -2 + 2s + t.$$

Also ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine besonders angenehme Koeffizientenmatrix. Sie ist nämlich in *Zeilenstufenform*. Wir definieren:

**DEFINITION 2.3.** Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix.  $A$  ist in *Zeilenstufenform*, wenn es  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $j_1, j_2, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$  gibt, sodass

- (1)  $j_r > j_{r-1} > \dots > j_1$ .
- (2) Für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  gilt:  $A(i, j_i) \neq 0$ .
- (3) Für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $k < j_i$  gilt:  $A(i, k) = 0$ .
- (4) Für alle  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  mit  $i > r$  und für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt:  $A(i, k) = 0$ .

Wenn  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix in Zeilenstufenform ist, und  $r$  wie in obiger Definition, dann treten in der Lösung von  $A \cdot x = 0$  genau  $n - r$  frei wählbare Parameter auf.

#### ÜBUNGSAUFGABEN 2.4.

- (1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

- (2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

- (3) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 &= 12 \\ 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 &= 4 \\ 1x_3 + 0x_4 - 1x_5 &= 14. \end{aligned}$$

(4) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

#### 4. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Wenn die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems Zeilenstaffelform hat, dann wissen wir bereits, wie wir alle Lösungen des Gleichungssystems bestimmen. Wir erklären mit einem Beispiel, wie wir sonst vorgehen. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben uns zunächst das System anders auf.

$$\begin{array}{rcccccc} I & 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \\ II & 1 & -4 & 6 & -2 & 0 & -4 \\ III & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ IV & 5 & -8 & 6 & 0 & -5 & -18 \end{array}$$

Wir addieren nun passende Vielfache der Gleichung I zu jeder der anderen Gleichungen, sodass in den neuen Gleichungen die Variable  $x_1$  nicht mehr vorkommt. Das führt auf

$$(2.13) \quad \begin{array}{rcccccc} II' & 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 & -I + II \\ III' & 0 & -5 & 10 & 4 & -2 & -9 & I + III \\ IV' & 0 & 17 & -34 & -10 & 5 & 27 & (-5) \cdot I + IV \end{array}$$

Nun hat das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen I,II,III,IV besteht, die gleiche Lösungsmenge wie das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen I,II',III',IV' besteht.

Das kann man so begründen: wenn ein Tupel  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  die Gleichungen I und IV erfüllt, dann erfüllt es auch die Gleichung IV', die ja eine Summe von Vielfachen der Gleichungen I und IV ist. Sei nun  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  ein Tupel, das die Gleichungen I und IV' erfüllt. Da  $IV' = -5 \cdot I + IV$ , gilt  $IV = IV' + 5 \cdot I$ . Daher ist die Gleichung IV eine Summe von Vielfachen der Gleichungen IV' und I. Also muss das Tupel  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  auch die Gleichung IV erfüllen.

Wir können also anstelle des Gleichungssystems I,II,III,IV das Gleichungssystem I,II',III',IV' lösen. In den Gleichungen II', III', IV' kommt die Variable  $x_1$  nicht vor.

Also können wir so vorgehen: wir bestimmen die Lösungen  $(x_2, x_3, x_4, x_5)$  der Gleichungen II', III', IV'. Für jede dieser Lösungen rechnen wir uns dann aus der Gleichung I den Wert von  $x_1$  aus.

Um die Lösungen von II', III', IV' zu bestimmen, addieren wir wieder passende Vielfache der Gleichung II' zu III' und IV'. Wir erhalten

$$(2.14) \quad \begin{array}{rcccccccc} III'' & 0 & 0 & 0 & -16 & 8 & 16 & 5 \cdot II' + III'' \\ IV'' & 0 & 0 & 0 & 58 & -29 & -58 & (-17) \cdot II' + IV'' \end{array}$$

Nun können wir alle Lösungen  $(x_3, x_4, x_5)$  der Gleichungen III'' und IV'' bestimmen. Dann können wir für jede Lösung aus II' den Wert von  $x_2$  bestimmen (und dann aus I den Wert von  $x_1$ ).

In den Gleichungen III'' und IV'' kommt  $x_3$  nicht vor. Wenn wir also eine Lösung  $(x_4, x_5)$  für die Gleichungen III'' und IV'' finden, dann können wir für  $x_3$  jede beliebige Zahl einsetzen. Für jede solche Setzung erhalten wir eine Lösung  $(x_3, x_4, x_5)$  von III'' und IV''. Wir merken uns:

$x_3$  ist frei wählbar,

sofern es Lösungen  $(x_4, x_5)$  für III'' und IV'' gibt. Jetzt versuchen wir, alle Lösungen  $(x_4, x_5)$  von III'' und IV'' zu finden. Dazu addieren wir ein passendes Vielfaches der Gleichung III'' zur Gleichung IV''. Wir erhalten

$$(2.15) \quad \begin{array}{rcccccccc} IV''' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58 \cdot III'' + 16 \cdot IV'' \end{array}$$

Alle Lösungen  $(x_5)$  dieser letzten Gleichung zu finden, ist einfach: wir können jeden Wert für  $x_5$  einsetzen. Also:

$x_5$  ist frei wählbar.

Setzen wir also  $x_5$  auf  $t$ , und schauen wir, welche Werte sich für die anderen Variablen ergeben.

Aus der Gleichung III'' erhalten wir

$$-16x_4 + 8t = 16,$$

also

$$x_4 = -1 + \frac{1}{2}t.$$

Da  $x_3$  frei wählbar ist, setzen wir  $x_3$  auf  $s$ .

Aus der Gleichung II' erhalten wir

$$x_2 = 5 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5,$$

also

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 + 2s - 4 + 2t - 2t \\ x_2 &= 1 + 2s. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung I erhalten wir schließlich

$$x_1 = -2 + 2s + t.$$

Also ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

### ÜBUNGSAUFGABEN 2.5.

- (1) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -10 \\ -x + 7y + 2z &= -10 \\ 5x - 8y + 5z &= -10. \end{aligned}$$

- (2) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -4x + 2y + 3z &= 12 \\ -6x + 3y + 0z &= -18 \\ 6x - 3y + 2z &= 34 \end{aligned}$$

- (3) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1x + 0y + 2z &= 16 \\ 2x + 3y - z &= -8 \\ 0x + 2y - 3z &= -36 \end{aligned}$$

- (4) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in parametrisierter Form an!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 8 \\ 2 & -3 & 8 & 0 \\ 10 & -7 & 24 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ 112 \end{pmatrix}.$$

- (5) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in parametrisierter Form an!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \\ 10 & -7 & -16 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 56 \end{pmatrix}$$

- (6) Ergänzen Sie die Gleichung

$$3x - 2y + 5z = 0$$

so zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen, dass das System

- (a) keine Lösung
- (b) genau eine Lösung
- (c) genau zwei Lösungen
- (d) eine Gerade als Lösungsmenge
- (e) eine Ebene als Lösungsmenge

hat.

- (7) Für zwei Goldbarren und acht Silbertaler erhalten Sie 69.000.– Schilling, für 7 Barren und 3 Taler 84.000.– Schilling. Wieviel ist ein Goldbarren wert? Wieviel ist ein Silbertaler wert?

- (8) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 67 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

(9) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 14 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(10) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ -28 \end{pmatrix}.$$

## 5. Einige durchgerechnete Beispiele zum Gauß-Algorithmus

---

### AUFGABE 2.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

`In[17] := << GaussDemo7.m`

`In[18] := Gauss [A1, b1]`

$$\begin{array}{ccccc|c} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & \\ \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 & -18 \end{array} \right) \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x1

$$\begin{array}{ccccc|c} x2 & x3 & x4 & x5 & & \\ \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -4 & 2 & & 5 \\ -5 & 10 & 4 & -2 & & -9 \\ 17 & -34 & -10 & 5 & & 27 \end{array} \right) \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x2

$$\begin{array}{ccccc|c} x3 & x4 & x5 & & & \\ \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & -16 & 8 & & & 16 \\ 0 & 58 & -29 & & & -58 \end{array} \right) \end{array}$$

x3 does not appear in any equation.

$$\begin{array}{ccccc|c} x4 & x5 & & & & \\ \left( \begin{array}{ccccc|c} -16 & 8 & & & & 16 \\ 58 & -29 & & & & -58 \end{array} \right) \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x4

$$\begin{array}{ccccc|c} x5 & & & & & \\ \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

x5 does not appear in any equation.

`x5 := t1`

We use

$$\left( \begin{array}{cc|c} x4 & x5 & \\ -16 & 8 & 16 \end{array} \right)$$

to compute `x4`

$$x4 = -1 + \frac{t1}{2}$$

`x3 := t2`

We use

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x2 & x3 & x4 & x5 & \\ 1 & -2 & -4 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

to compute `x2`

$$x2 = 1 + 2 t2$$

We use

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & \\ 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \end{array} \right)$$

to compute `x1`

$$x1 = -2 + t1 + 2 t2$$

$$\text{Out}[18] = \{ \{-2, 1, 0, -1, 0\}, \{ \{1, 0, 0, \frac{1}{2}, 1\}, \{2, 2, 1, 0, 0\} \} \}$$

## AUFGABE 2.7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 12 & 14 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

`In[19] := << GaussDemo7.m`

`In[20] := Gauss [A2, b2]`

$$\left( \begin{array}{cccc|c} x1 & x2 & x3 & x4 & \\ 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 10 & 14 & 20 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 6 & 12 & 14 & 1 \end{array} \right)$$

We use equation (1) of the last system to eliminate `x1`

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x2 & x3 & x4 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -13 & -20 & -27 & 1 \\ 26 & 40 & 50 & 1 \end{array} \right)$$

We use equation (2) of the last system to eliminate `x2`

$$\left( \begin{array}{cc|c} x_3 & x_4 & \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{array} \right)$$

$x_3$  does not appear in any equation.

$$\left( \begin{array}{c|c} x_4 & \\ 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{array} \right)$$

We use equation (1) of the last system to eliminate  $x_4$

The system has no solution

Out [20]= NOSOLUTION

### AUFGABE 2.8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 67 \\ 21 \end{pmatrix}$$

In[21] := << GaussDemo7.m

In[22] := Gauss [A3, b3]

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 5 & 3 & 16 \\ 2 & 10 & 8 & 34 \\ 4 & 20 & 15 & 67 \\ 1 & 6 & 5 & 21 \end{array} \right)$$

We use equation (1) of the last system to eliminate  $x_1$

$$\left( \begin{array}{cc|c} x_2 & x_3 & \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

We use equation (3) of the last system to eliminate  $x_2$

$$\left( \begin{array}{c|c} x_3 & \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \right)$$

We use equation (1) of the last system to eliminate  $x_3$

We use

$$\left( \begin{array}{c|c} x_3 & \\ 2 & 2 \end{array} \right)$$

to compute  $x_3$

$x_3 = 1$

We use

$$\left( \begin{array}{cc|c} x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

to compute  $x_2$

$$x_2 = 3$$

We use

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 5 & 3 & 16 \end{array} \right)$$

to compute  $x_1$

$$x_1 = -2$$

$$\text{Out}[22] = \{-2, 3, 1\}, \{\}$$

### AUFGABE 2.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 68 \\ 22 \end{pmatrix}$$

`In[23] := << GaussDemo7.m`

`In[24] := Gauss [A4, b4]`

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 5 & 3 & 16 \\ 2 & 10 & 8 & 34 \\ 4 & 20 & 15 & 68 \\ 1 & 6 & 5 & 22 \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate  $x_1$

$$\left( \begin{array}{cc|c} x_2 & x_3 & \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

We use equation (3) of the last system to eliminate  $x_2$

$$\left( \begin{array}{c|c} x_3 & \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right)$$

We use equation (1) of the last system to eliminate  $x_3$

The system has no solution

$$\text{Out}[24] = \text{NOSOLUTION}$$

