KAPITEL 7

Lineare Abbildungen

1. Beispiele

Wir betrachten einige Funktionen, die von einem Vektorraum in einen Vektorraum gehen.

AUFGABE 7.1. Sei s jene Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die jeden Punkt auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an der x-Achse landet. Dann lässt sich s so schreiben:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}.$$

AUFGABE 7.2. Wir überlegen uns, wo der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nach einer Drehung um den Nullpunkt um 60° gegen den Uhrzeigersinn landet. Sei d diese Drehung. Dann lässt sich d so schreiben:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}.$$

AUFGABE 7.3. Wir bestimmen die Projektion des Punktes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ auf $U = L((0, 1, 2), (3, 0, 4))$. Sei p_U diese Projektionsabbildung. Wir berechnen die Projektionsmatrix P_U in folgender Rechnung:

```
In[90]:= B = Transpose[{{0, 1, 2}, {3, 0, 4}}]
Out[90]= {{0, 3}, {1, 0}, {2, 4}}

In[91]:= PU = B . Inverse[Transpose[B].B] . Transpose[B];

         MatrixForm[PU]
```

Out[91]= $\begin{pmatrix} \frac{45}{61} & -\frac{24}{61} & \frac{12}{61} \\ -\frac{24}{61} & \frac{25}{61} & \frac{18}{61} \\ \frac{12}{61} & \frac{18}{61} & \frac{52}{61} \end{pmatrix}$

Somit haben wir eine Matrix P_U gefunden, sodass $P_U \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die Projektion von (x, y, z) auf U ist.

---

[0]Unterlagen zur Vorlesung Algebra von Erhard Aichinger, Peter Mayr. 10.12.2007.

Solche Abbildungen, die man durch Matrizen beschreiben kann, werden der Inhalt dieses Kapitels sein.

2. Die Definition linearer Abbildungen

DEFINITION 7.4. Seien U und V Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $h : U \to V$ ist eine *lineare Abbildung*, wenn:

(1) für alle $u_1, u_2 \in U : h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2)$
(2) für alle $u \in U$ und für alle $\lambda \in K : h(\lambda\, u) = \lambda\, h(u)$

BEISPIEL 7.5. Sei K ein Körper, und sei $A \in K^{n \times m}$. Dann ist die Abbildung h, die durch

$$\begin{array}{rccc} h & : & K^m & \longrightarrow & K^n \\ & & x & \longmapsto & A \cdot x \end{array}$$

definiert ist, eine lineare Abbildung vom K-Vektorraum K^m in den K-Vektorraum K^n.

AUFGABE 7.6. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ sind linear?

(1) $h_1((x, y)) = 3\,x - 2\,y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $h_2((x, y)) = 3\,x + 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$.
(3) $h_3((x, y)) = 0$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(1) Wir zeigen, dass die Abbildung h_1 linear ist. Seien dazu $u, v \in \mathbb{R}^2$. Es gibt dann $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, sodass $u = (x_1, y_1)$ und $v = (x_2, y_2)$. Es gilt dann $h_1(u+v) = 3\,(x_1+x_2) - 2\,(y_1+y_2) = (3\,x_1 - 2\,y_1) + (3\,x_2 - 2\,y_2) = h_1(u) + h_1(v)$ und $h_1(\lambda\, u) = 3\,(\lambda\, x_1) - 2\,(\lambda\, y_1) = \lambda\,(3\,x_1 - 2\,y_1) = \lambda\, h_1(u)$.
(2) h_2 ist keine lineare Abbildung, da $h_2((1, 1) + (1, 1)) = h_2((2, 2)) = 7$ und $h_2((1, 1)) + h_2((1, 1)) = 4 + 4 = 8$.
(3) h_3 ist linear.

SATZ 7.7. *Sei K ein Körper, seien U, V, W Vektorräume über K, und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist die Hintereinanderausführung $g \circ f$ ebenfalls linear.*

SATZ 7.8. *Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, und sei V ein Vektorraum über K mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_m)$. Dann ist die Abbildung c, die durch*

$$\begin{array}{rccc} c & : & V & \longrightarrow & K^m \\ & & v & \longmapsto & (v)_B \end{array}$$

definiert ist, eine lineare Abbildung.

Beweis. Wir geben hier nur den Beweis dafür, dass $c(u+v) = c(u)+c(v)$ für alle $u, v \in V$. Seien $u, v \in V$. Zu zeigen ist, dass $(u + v)_B = (u)_B + (v)_B$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ und $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i = u$$

und

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \, b_i = v.$$

Dann gilt also $(u)_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ und $(v)_B = (\mu_1, \dots, \mu_m)$. Wir berechnen nun

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) \, b_i.$$

Es gilt $\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) \, b_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, b_i = u + v$. Da also $\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) \, b_i = u + v$, gilt $(u + v)_B = (\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_m + \mu_m) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) + (\mu_1, \dots, \mu_m) = (u)_B + (v)_B$. ■

Auch die inverse Abbildung dieser Abbildung ist linear:

SATZ 7.9. *Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, und sei V ein Vektorraum über K mit Basis $B = (b_1, \dots, b_m)$. Dann ist die Abbildung d, die durch*

$$\begin{array}{rccc} d \; : & K^m & \longrightarrow & V \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_m) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i \end{array}$$

definiert ist, eine lineare Abbildung.

SATZ 7.10. *Seien U und V Vektorräume über K mit den Basen $B = (b_1, \dots, b_m)$ und $C = (c_1, \dots, c_n)$. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Die Funktion $f : U \to V$ bilde x auf jenes y, das durch*

$$(y)_C = A \cdot (x)_B$$

gegeben ist, ab. Dann ist h eine lineare Abbildung.

Beweisskizze. Es gilt $f = g \circ h \circ i$, wobei $i : U \to K^m, u \mapsto (u)_B$, $h : K^m \to K^n, x \mapsto A \cdot x$, $g : K^n \to V, (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, c_i$. Alle drei Abbildungen g, h, i sind linear, also auch ihre Hintereinanderausführung. ■

AUFGABE 7.11. Sei U der Unterraum des $\mathbb{R}^3$ mit Basis $B = ((1, 1, 1), (1, 0, 0))$, und sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto (v)_B$. Dann ist etwa

$$\begin{aligned} h((4, 1, 1)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ h((-1, -1, -1)) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ÜBUNGSAUFGABEN 7.12.

(1) Eine lineare Abblidung von h von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bildet den Punkt $\binom{1}{1}$ auf $\binom{2}{0}$ und den Punkt $\binom{1}{-1}$ auf $\binom{0}{-2}$ ab. Auf welchen Punkt wird $\binom{1}{2}$ abgebildet?
(2) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn h eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$ ist und $h \neq 0$, dann gilt für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_3$:

$$(v_1, v_2) \text{ linear unabhängig } \Rightarrow (h(v_1), h(v_2)) \text{ linear unabhängig.}$$

3. Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen

Sei $h : U \to V$ eine lineare Abbildung, $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U. Sei $x \in U$ mit $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i$. Dann gilt wegen der Linearität von h:

$$h(x) = h(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot h(b_i).$$

Eine lineare Abbildung ist also durch die Bilder der Basisvektoren bereits vollständig bestimmt.

Wir werden jetzt sehen, dass sich jede lineare Abbildung, deren Definitions- und Bildbereich endlichdimensionale Vektorräume sind, durch eine Matrix darstellen lässt.

DEFINITION 7.13. Seien U, V Vektorräume über K, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V. Wir definieren nun die $n \times m$-Matrix $S_h(B, C)$. Dazu legen wir fest, dass für $i \in \{1, \ldots, m\}$ in der i-ten Spalte von $S_h(B, C)$ der Vektor $(h(b_i))_C$ steht. Es gilt also

$$S_h(B, C) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (h(b_1))_C & (h(b_2))_C & \cdots & (h(b_m))_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $S_h(B, C) \in K^{n \times m}$ heißt *Abbildungsmatrix* oder *Darstellungsmatrix* von h bezüglich der Basen B und C.

SATZ 7.14. *Seien U, V Vektorräume über K, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V. Dann gilt*

$$(h(u))_C = S_h(B, C) \cdot (u)_B \text{ für alle } u \in U. \tag{7.1}$$

Beweis. Sei $u \in U$ mit $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(h(u))_C &= \big(h(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i)\big)_C \\
&= \big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h(b_i)\big)_C \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(h(b_i)\big)_C \\
&= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (h(b_1))_C & (h(b_2))_C & \cdots & (h(b_m))_C \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\
&= S_h(B, C) \cdot (u)_B.
\end{aligned}$$

■

Wir zeigen nun, dass die Abbildungsmatrix durch die Gleichung (7.1) eindeutig bestimmt ist.

SATZ 7.15. *Seien U, V Vektorräume über K, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V, und sei A eine $n \times m$-Matrix, sodass für alle $u \in U$:*

$$(h(u))_C = A \cdot (u)_B. \tag{7.2}$$

Dann gilt $A = S_h(B, C)$.

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$. Wegen (7.2) gilt $(h(b_i))_C = A \cdot (b_i)_B$, also

$$(h(b_i))_C = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei der Einser an der $i$ten Stelle steht. Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt die i-te Spalte von A. Also ist die i-te Spalte von A gleich $(h(b_i))_C$. Daher $A = S_h(B, C)$. ■

AUFGABE 7.16. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die folgende lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} h \ : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 2x+y \\ -x+4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei B die Basis $(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix})$ des $\mathbb{R}^2$, und sei C die Basis $(\begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 39 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $S_h(B, C)$.

Lösung: Es gilt

$$h(b_1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \ h(b_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -9 & 20 & 0 \\ -13 & 39 & 1 \\ -7 & 30 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

erhalten wir $(h(b_1))_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und ebenso $(h(b_2))_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Insgesamt erhalten wir

$$S_h(B, C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In Mathematica kann man die notwendigen Rechnungen so durchführen:

```
In[92]:= h[x_, y_] = {{3, -2}, {2, 1}, {-1, 4}} . {x, y}
Out[92]= {3 x - 2 y, 2 x + y, -x + 4 y}

In[93]:= hb1 = h[-1, 2]
Out[93]= {-7, 0, 9}

In[94]:= hb2 = h[4, 5]
Out[94]= {2, 13, 16}

In[95]:= CC = {{-9, 20, 0}, {-13, 39, 1}, {-7, 30, 0}}
Out[95]= {{-9, 20, 0}, {-13, 39, 1}, {-7, 30, 0}}

In[96]:= MatrixForm[CC]
Out[96]= ( -9   20  0 )
         ( -13  39  1 )
         ( -7   30  0 )

In[97]:= LinearSolve[CC, hb1]
Out[97]= {3, 1, 0}

In[98]:= LinearSolve[CC, hb2]
Out[98]= {2, 1, 0}
```

AUFGABE 7.17. Sei $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^1$ mit den kanonischen Basen $B = ((1, 0), (0, 1))$ und $C = ((1))$. Die lineare Abbildung $h : U \to V$ sei definiert durch

$$h((x, y)) = (3\,x - 2\,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist $(h(b_1))_C = (3)$ und $(h(b_2))_C = (-2)$. Somit gilt

$$S_h(B, C) = (3 \quad -2).$$

AUFGABE 7.18. Sei $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^1$ mit den Basen $B = ((2, 3), (3, -2)), C = ((2))$. Die lineare Abbildung $h : U \to V$ sei definiert durch

$$h((x, y)) = (3\,x - 2\,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $h(b_1) = 0$, also $(h(b_1))_B = (0)$ und $h(b_2) = (13)$, also $(h(b_2))_B = 6.5$, und folglich $S_h(B, C) = (0 \;\; 6.5)$.

ÜBUNGSAUFGABEN 7.19.

(1) Eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $h(\binom{1}{-1}) = \binom{0}{2}$ und $h(\binom{-2}{1}) = \binom{1}{7}$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_h(E, E)$, wobei $E = (\binom{1}{0}, \binom{0}{1})$.
(2) Seien E_2, E_3 die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, und sei

$$\sigma((x, y, z)) := (3x - 2y,\ 2z).$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E_3, E_2)$ an.

4. Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen

Wir wollen nun die Abbildungsmatrizen für bestimmte Drehungen und Spiegelungen bestimmen. Wir betrachten folgende Beispiele:

AUFGABE 7.20. Sei e die Ebene $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, und sei σ jene Abbildung, die jeden Punkt im $\mathbb{R}^3$ auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an der Ebene e landet.

Gesucht ist die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E, E)$ dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis E des $\mathbb{R}^3$.

AUFGABE 7.21. Sei g die Gerade mit der Gleichung $5x - 2y = 0$ im $\mathbb{R}^2$. Sei σ jene Abbildung, die jeden Punkt im $\mathbb{R}^2$ auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an g landet.

Gesucht ist die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E, E)$ dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis E des $\mathbb{R}^2$.

AUFGABE 7.22. Sei g die Gerade $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$, und sei $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jene Abbildung, die jeden Punkt auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Drehung um 60° um die Gerade g landet. Wir müssen noch die Richtung der Drehung festlegen: Wenn wir vom Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $x + 2y - 2z = 0$ hinunterschauen, dann sollen sich die Punkte dieser Ebene gegen den Uhrzeigersinn drehen.

Alle drei Beispiele kann man mit dem gleichen "Programm" lösen. Sei h die angegebene lineare Abbildung. Dann gehen wir so vor:

(1) Bestimme eine Basis B, sodass $S_h(B, B)$ leicht zu bestimmen ist.
(2) Bestimme $S_h(B, B)$.
(3) Bestimme $S_h(E, E)$ aus $S_h(B, B)$.

Die Schritte (1) und (2) können wir bereits jetzt durchführen; für den Schritt (3) müssen wir uns noch überlegen, wie man aus den Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis die Koordinaten bezüglich einer anderen Basis ausrechnet.

Wir starten mit Beispiel 7.20. Wir wählen eine Basis (b_1, b_2, b_3) des $\mathbb{R}^3$, sodass b_1, b_2 in der Ebene e liegen, und b_3 auf b_1 und b_2 normal steht. Es gilt dann $\sigma(b_1) = b_1$,

$\sigma(b_2) = b_2$ und $\sigma(b_3) = -b_3$. Also gilt $(\sigma(b_1))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\sigma(b_2))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(\sigma(b_3))_B = (-b_3)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$S_\sigma(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun eine Basis B mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu wählen wir $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir bestimmen einen Vektor, der auf beiden normal steht:

```
In[99]:= NullSpace[{{1, 2, -1}, {0, 1, -1}}]
Out[99]= {{-1, 1, 1}}
```

Also wählen wir $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und somit

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Wir bestimmen nun B und $S_\sigma(B, B)$ für Beispiel 7.21. Wir wählen eine Basis (b_1, b_2) des $\mathbb{R}^2$, sodass b_1 auf der Gerade g liegt, und b_2 auf b_1 normal steht. Es gilt dann $\sigma(b_1) = b_1$ und $\sigma(b_2) = -b_2$, und somit $(\sigma(b_1))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(\sigma(b_2))_B = (-b_2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$S_\sigma(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun eine Basis B mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu wählen wir $b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Wir erhalten

$$B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

Nun bestimmen wir B und $S_\delta(B, B)$ für Beispiel 7.22. Dazu bestimmen wir eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$, sodass $b_3 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Außerdem soll (b_1, b_2, b_3) *positiv orientiert* sein. Das heißt: "Wenn man b_1 in b_2 hineinschraubt, dann soll sich eine Schraube mit Rechtsgewinde in Richtung b_3 bewegen." Eine ONB (b_1, b_2, b_3) ist dann positiv orientiert, wenn $b_1 \times b_2 = b_3$. Zu dieser Basis B bestimmen wir jetzt die Matrix $S_\delta(B, B)$. Es gilt $h(b_3) = b_3$, $h(b_1) = \cos(60°)\, b_1 + \sin(60°)\, b_2$, und $h(b_2) = -sin(60°)\, b_1 + \cos(60°)\, b_2$. Mit $c := \cos(60°)$ und $s := \sin(60°)$ lässt sich $S_\delta(B, B)$ also durch

$$S_\delta(B, B) = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

angeben. Jetzt bestimmen eine Basis B des $\mathbb{R}^3$ mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu bestimmen wir zunächst eine ONB der Ebene $e = (L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}))^\perp$. Wir bestimmen eine Basis für diese Ebene:

```
In[100]:= NullSpace[ {{1, 2, -2}}]
Out[100]= {{2, 0, 1}, {-2, 1, 0}}
```

Daher ist ((2, 0, 1), (−2, 1, 0)) eine Basis von e. Wir bestimmen nun eine ONB von e.

```
In[101]:= e1 = {2, 0, 1};

          e2 = {-2, 1, 0};

          d1 = e1 / Sqrt[e1.e1]
```

Out[101]= $\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$

```
In[102]:= c2 = e2 - (e2.d1) * d1
```

Out[102]= $\left\{-\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right\}$

```
In[103]:= d2 = c2 / Sqrt[c2.c2]
```

Out[103]= $\left\{-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right\}$

Daher ist die Basis F, die durch

$$F = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$$

gegeben ist, eine ONB des $]R^3$. Wir bestimmen, ob F positive Orientierung hat:

```
In[104]:= Cross[d1, d2]
```

Out[104]= $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

Die Orientierung ist also noch falsch. Wenn wir das Vorzeichen von f_1 umdrehen, erhalten wir eine Basis mit positiver Orientierung. (Man kann genausogut das Vorzeichen von f_2 umdrehen. Man darf aber nicht das Vorzeichen von f_3 umdrehen; die Basis, die man durch Umdrehen des Vorzeichens von f_3 erhält, ist zwar positiv orientiert, aber ihr dritter Basisvektor ist nicht mehr der gewünschte.) Wir schreiben die Basisvektoren von B in die Spalten der Matrix $\overline{B}$.

```
In[105]:= d3 = Cross [-d1, d2]
```

Out[105]= $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$

```
In[106]:= B = Transpose [{-d1, d2, d3}]
```

Out[106]= $\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$

```
In[107]:= MatrixForm [B]
```

Out[107]= $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Somit haben wir auch für Beispiel 7.22 eine Basis B und die Matrix $S_\delta(B, B)$ gefunden.

5. Basistransformationen

Wir lösen folgendes Problem: Gegeben sind zwei Basen B, C des gleichen Unterraums U des $\mathbb{R}^n$, und die Koordinaten $(v)_B$ eines Vektors $v \in U$. Gesucht sind die Koordinaten von v bezüglich C, also $(v)_C$.

AUFGABE 7.23. Sei $B = ((1, 0, 1), (1, -1, 0))$ und $C = ((3, -2, 1), (1, 1, 2))$, und sei $(x)_B = (1, -1)$. Gesucht ist $(x)_C$.

Lösung: Aus B und $(x)_B$ können wir

$$x = B \cdot (x)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Wegen $C \cdot (x)_C = x$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (x)_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir $(x)_C = (-0.2, 0.6)$.

Allgemein gehen wir also so vor: Wenn $\overline{B}$ und $\overline{C}$ die Matrizen sind, in deren Spalten die Vektoren von B beziehungsweise C stehen. Dann lässt sich $(x)_C$ aus der Gleichung

$$\overline{C} \cdot (x)_C = \overline{B} \cdot (x)_B$$

berechnen. Wenn $\overline{C}$ gleich viele Spalten wie Zeilen hat, dann ist $\overline{C}$ invertierbar, und wir erhalten

$$(x)_C = \overline{C}^{-1} \cdot \overline{B} \cdot (x)_B.$$

Wenn $\overline{C}$ weniger Spalten als Zeilen hat, dann wissen wir, dass die Spaltenvektoren von $\overline{C}$ linear unabhängig sind. Da $\overline{C}$ eine Matrix über den reellen Zahlen ist, ist $\overline{C}^T \cdot \overline{C}$ invertierbar. Dann gilt: $\overline{C}^T \cdot \overline{C} \cdot (x)_C = \overline{C}^T \cdot \overline{B} \cdot (x)_B$, und somit

$$(x)_C = (\overline{C}^T \cdot \overline{C})^{-1} \cdot \overline{C}^T \cdot \overline{B} \cdot (x)_B.$$

DEFINITION 7.24. Sei K ein Körper, sei U ein Unterraum von K^n, und seien B und C Basen von U. Eine Matrix T ist eine *Basistransformationsmatrix* von B nach C, wenn für alle $u \in U$ gilt

$$(u)_C = T \cdot (u)_B.$$

Es gibt genau eine solche Matrix. Wir kürzen sie mit ${}_CT_B$ ab. Es gilt also

$$(u)_C = {}_CT_B \cdot (u)_B \text{ für alle } u \in U.$$

Die Basistransformationsmatrix ist genau die Abbildungsmatrix $S_{\mathrm{id}}(B, C)$, wobei id : $U \to U$, $u \mapsto u$ die identische Abbildung ist.

Seien $\overline{B}$ und $\overline{C}$ die Matrizen, in deren Spalten die Vektoren der Basen B bzw. C stehen. Dann kann die Basistransformationsmatrizen so berechnen:

(1) Falls $\overline{B}$ und $\overline{C}$ quadratische Matrizen sind, so gilt ${}_C T_B := \overline{C}^{-1} \cdot B$.
(2) Falls $\overline{C}^T \cdot \overline{C}$ invertierbar ist (das ist immer der Fall, wenn K der Körper der reellen Zahlen ist), so gilt ${}_C T_B := (\overline{C}^T \cdot \overline{C})^{-1} \cdot \overline{C}^T \cdot \overline{B}$.
(3) In jedem Fall kann man ${}_C T_B$ als Abbildungsmatrix $S_{\mathrm{id}}(B, C)$ berechnen. In der i-ten Spalte von ${}_C T_B$ steht also $(b_i)_C$, also die Lösung des Gleichungssystems $\overline{C} \cdot x = b_i$.

ÜBUNGSAUFGABEN 7.25.

(1) (Koordinaten) Die Ebene ε hat die Basen

$$A = (\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix})$$

und

$$B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}).$$

(a) Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A!
(b) Bestimmen Sie eine Matrix T, sodass für alle $v \in \varepsilon$ gilt:

$$(v)_A = T \cdot (v)_B.$$

(Diese Matrix heißt *Basistransformationsmatrix*).

6. Die Hintereinanderausführung und die Matrizenmultiplikation

SATZ 7.26. *Seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K mit den Basen A, B, C, und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt*

$$S_{g \circ f}(A, C) = S_g(B, C) \cdot S_f(A, B). \tag{7.3}$$

Beweis. Wir zeigen, dass für alle $u \in U$ gilt:

$$(S_g(B, C) \cdot S_f(A, B)) \cdot (u)_A = ((g \circ f)\ (u))_C.$$

Dann folgt aus Satz 7.15 die Gleichung 7.3. Sei $u \in U$. Dann gilt $(S_g(B, C) \cdot S_f(A, B)) \cdot (u)_A = S_g \cdot (S_f(A, B) \cdot (u)_A) = S_g \cdot (f(u))_B = \big(g(f(u))\big)_A = \big(g \circ f\ (u)\big)_A$. ∎

AUFGABE 7.27. Man spiegle den Punkt (2, 3) an der x-Achse, und drehe anschließend den gespiegelten Punkt um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt:

Lösung: Die Spiegelung σ an der x-Achse hat bzgl. der kanonischen Basis E des $\mathbb{R}^2$ die Darstellungsmatrix $S_\sigma(E, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Drehung δ um 90° hat die Darstellungsmatrix $S_\delta(E, E) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix}$. Die Darstellungsmatrix der Spiegelung mit anschließender Drehung ist also

$$S_{\delta\circ\sigma}(E,E) = S_\delta(E,E)\cdot S_\sigma(E,E) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & \sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & -\cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $\delta(\sigma((2,3))) = (3,2)$.

SATZ 7.28. *Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, und seien A, B Basen von U und C, D Basen von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V. Dann gilt*

$$S_h(A,D) = {}_DT_C \cdot S_h(B,C) \cdot {}_BT_A.$$

Beweisskizze. Für alle $u \in U$ gilt ${}_DT_C \cdot S_h(B,C) \cdot {}_BT_A \cdot (u)_A = (h(u))_D$. Also gilt nach Satz 7.15 ${}_DT_C \cdot S_h(B,C) \cdot {}_BT_A = S_h(A,D)$. ■

Das folgende Korollar wird uns helfen, die Beispiele 7.20, 7.21 und 7.22 zu lösen.

KOROLLAR 7.29. *Sei K ein Körper, sei B eine Basis des K-Vektorraums K^n, und sei E die kanonische Basis von K^n. Sei h eine lineare Abbildung von K^n nach K^n. Dann gilt*

$$S_h(E,E) = {}_ET_B \cdot S_h(B,B) \cdot {}_BT_E.$$

Wenn $\overline{B}$ die Matrix ist, in deren Spalten die Vektoren von B stehen, so gilt also

$$S_h(E,E) = \overline{B} \cdot S_h(B,B) \cdot \overline{B}^{-1}.$$

7. Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen bezüglich der kanonischen Basis

.

Wir lösen das Beispiel 7.20. Dazu müssen wir die Abbildungsmatrix $S_h(E,E)$ aus der Abbildungsmatrix $S_h(B,B)$ ausrechnen.

```
In[108]:= B = Transpose [{{1, 2, -1}, {0, 1, -1}, {-1, 1, 1}}]
Out[108]= {{1, 0, -1}, {2, 1, 1}, {-1, -1, 1}}

In[109]:= ShBB = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -1}}
Out[109]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -1}}

In[110]:= ETB = B
Out[110]= {{1, 0, -1}, {2, 1, 1}, {-1, -1, 1}}

In[111]:= BTE = Inverse [B]
```

$$\text{Out[111]=} \left\{\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}, \{-1, 0, -1\}, \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}\right\}$$

```
In[112]:= ShEE = ETB . ShBB . BTE
```

$$\text{Out[112]=} \left\{\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}\right\}$$

```
In[113]:= MatrixForm [ShEE]
```

Out[113]= $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Nun lösen wir das Beispiel 7.21.

```
In[114]:= B = Transpose[{{2, 5}, {5, -2}}]
Out[114]= {{2, 5}, {5, -2}}

In[115]:= ShBB = {{1, 0}, {0, -1}}
Out[115]= {{1, 0}, {0, -1}}

In[116]:= ETB = B
Out[116]= {{2, 5}, {5, -2}}

In[117]:= BTE = Inverse[B]
```

Out[117]= $\left\{\left\{\frac{2}{29}, \frac{5}{29}\right\}, \left\{\frac{5}{29}, -\frac{2}{29}\right\}\right\}$

```
In[118]:= ShEE = ETB . ShBB . BTE
```

Out[118]= $\left\{\left\{-\frac{21}{29}, \frac{20}{29}\right\}, \left\{\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right\}\right\}$

```
In[119]:= MatrixForm[ShEE]
```

Out[119]= $\begin{pmatrix} -\frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{21}{29} \end{pmatrix}$

Schließlich lösen wir noch Beispiel 7.22

```
In[120]:= B = Transpose[{-1/Sqrt[5] * {2, 0, 1},
              1/Sqrt[45] * {-2, 5, 4}, 1/3 * {1, 2, -2}}]
```

Out[120]= $\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$

```
In[121]:= c = Cos[π/3];

          s = Sin[π/3];

          ShBB = {{c, -s, 0}, {s, c, 0}, {0, 0, 1}}
```

Out[121]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$

```
In[122]:= ETB = B
```

Out[122]= $\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$

```
In[123]:= BTE = Inverse[B]
```

Out[123]= $\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \left\{-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$

```
In[124]:= ShEE = Simplify[ETB.ShBB.BTE]
```

$$Out[124]= \left\{\left\{\frac{5}{9}, \frac{1}{9}+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{9}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{\frac{1}{9}-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{13}{18}, \frac{1}{18}\left(-4-3\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{-\frac{1}{9}-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{18}\left(-4+3\sqrt{3}\right), \frac{13}{18}\right\}\right\}$$

```
In[125]:= MatrixForm[N[ShEE, 6]]
```

$$Out[125]= \begin{pmatrix} 0.555556 & 0.688461 & 0.466239 \\ -0.466239 & 0.722222 & -0.510897 \\ -0.688461 & 0.0664529 & 0.722222 \end{pmatrix}$$

ÜBUNGSAUFGABEN 7.30.

(1) Finden Sie eine Basis B, bezüglich der die Spiegelung δ an der Ebene $x + y + z = 0$ die Abbildungsmatrix

$$S_\delta(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat.

(2) Bestimmen Sie eine geeignete Basis B des $\mathbb{R}^2$, für die die Abbildungsmatrix der Spiegelung s an der Geraden $g : 7\,x - 4\,y$ folgende Form besitzt:

$$S_s(B, B) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

(3) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt der Ebene $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $-3\,x + 4\,y = 0$ spiegelt.

(a) Bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^2$, sodass für die Abbildungsmatrix $S_\sigma(B, B)$ der Spiegelung σ bezüglich der Basis B folgende Gleichung gilt.

$$S_\sigma(B, B) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E, E)$ der Spiegelung σ bezüglich der kanonischen Basis E.

(c) Wo landet der Punkt (a, b) nach dieser Spiegelung σ?

(4) Sei h die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x + 2\,y + 2\,z = 0$ spiegelt.

(a) Berechnen Sie $h(v)$ für $v \in \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_h(B, B)$ für die Basis

$$B = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)).$$

(5) Wir betrachten die Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jeden Punkt an der y-Achse spiegelt. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E, E)$ dieser Abbildung bezüglich der kanonischen Basis E. Testen Sie Ihre Abbildungsmatrix, indem Sie damit das Spiegelbild von $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ ausrechnen.

(6) Geben Sie die Darstellungsmatrix für die Spiegelung an der Ebene $2\,x - y + z = 0$ bezüglich der kanonischen Basis E an. (Sie brauchen die auftretenden inversen Matrizen nicht zu berechnen.)

(7) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene)

(a) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden

$$x + y = 0$$

spiegelt. Wo landet der Punkt (a, b) nach dieser Spiegelung σ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.

(b) Finden Sie mithilfe einer Skizze, wo der Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ landet, und überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Rechnung anhand der Skizze.

(8) Sei h die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x+2\,y+2\,z = 0$ spiegelt. Wir suchen in diesem Beispiel $S_h(E, E)$, wobei E die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Gehen Sie dazu so vor:

(a) Bestimmen Sie $S_{\mathrm{id}}(E, B)$. Dabei ist id die identische Abbildung. $S_{\mathrm{id}}(E, B)$ ist also eine Basistransformationsmatrix, und erfüllt die Eigenschaft $(v)_B = S_{\mathrm{id}}(E, B) \cdot (v)_E$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.)

(b) Bestimmen Sie $S_{\mathrm{id}}(B, E)$.

(c) Bauen Sie aus diesen beiden Matrizen und $S_h(B, B)$ die Matrix $S_h(E, E)$ zusammen.

(9) (Spiegelung an einer Ebene im Raum) Wo landet der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ nach der Spiegelung σ an der Ebene

$$-2\,x - y + z = 0 \text{ ?}$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung!

(10) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden $12\,x + 5\,y = 0$ spiegelt. Wo landet der Punkt (a, b) nach dieser Spiegelung σ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.

(11) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden $15\,x - 8\,y = 0$ spiegelt. Wo landet der Punkt (a, b) nach dieser Spiegelung σ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.

(12) Geben Sie die Darstellungsmatrix für die Spiegelung an der Geraden $x - 2\,y = 0$ bezüglich der kanonischen Basis E an.

(13) Wo landet der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ nach der Drehung δ um 90° um die Gerade

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Drehung bezüglich der kanonischen Basis! Wir drehen dabei *gegen den Uhrzeigersinn*, wenn man von $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schaut.

(14) (Drehung um eine Gerade im Raum) Wo landet der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ nach der Drehung δ um 90° um die Gerade g, die durch

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben ist? Dabei drehen wir *gegen den Uhrzeigersinn*, wenn man von $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schaut. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Drehung bezüglich der kanonischen Basis!