Übung „Algebra für Informatiker“, SS 2011
11. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 9./10.5.2011

Beispiel 1

Gegeben seien die folgenden Abbildungen im $\mathbb{R}^3$, dem dreidimensionalen reellen Vektorraum:

(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$, worin $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$;

(ii) $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, worin $t \in \mathbb{R}$;

(iii) $\chi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Sind φ, ψ, χ lineare Abbildungen? Beweisen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie im positiven Fall zudem die Matrizen der Abbildungen bezüglich der kanonischen Basis.

Beispiel 2

Gegeben sei die Gerade $g = \{t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^3$, und φ sei eine Drehung um 30° mit Drehachse g. Bestimmen Sie die möglichen Darstellungsmatrizen von φ.

Beispiel 3

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Punkte auf der Ebene $E = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ werden an der Geraden $g = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ gespiegelt.

(ii) Der Abstand jedes Punktes von der Ebene E bleibt unter φ erhalten.

Was fehlt für eine eindeutige Charakterisierung von φ? Bestimmen Sie die parametrisierte Menge aller möglichen Darstellungsmatrizen von φ.

Beispiel 4

Gegeben seien die Basis

$$B_1 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

des $\mathbb{R}^2$ sowie die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche bezüglich B_1 die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

besitze.

Gegeben sei die weitere Basis

$$B_2 = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

des $\mathbb{R}^2$.

(1) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen von B_1 nach B_2 sowie von B_2 nach B_1.

(2) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich B_2.

Beispiel 5

Es $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die parametrisierte Menge der möglichen Darstellungsmatrizen von φ bezüglich der kanonischen Basen.

Beispiel 6

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis gegeben.

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion φ^{-1} von φ, d.h. diejenige lineare Abbildung $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, für die $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = I$ gilt, worin I die identische Abbildung auf dem $\mathbb{R}^2$ ist.