Algebra für Informatiker/innen
5. Übungsblatt für den 2. und 3. April 2009

1. Lösen Sie das linearen Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit dem Gauß'schen Algorithmus, wobei

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|b) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ -1 & 2 & 6 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-2) = 3, f(4) = 0, f(5) = -7$. (Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynomfunktion, falls es $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall x \in \mathbb{R} : \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.)

4. Berechnen Sie die Ergebnisse falls möglich.

   (a) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

   (d) $2009 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^T$

   (f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}^T$

5. Zeigen Sie das Rechtsdistributivgesetz für $n \times n$-Matrizen:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n} : \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

6. Berechnen Sie die Matrixprodukte.

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

7. Welche Matrizen sind invertierbar? Berechnen Sie im Fall der Invertierbarkeit jeweils die Inverse.

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

8. Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}, n > 1$ Matrizen $A_n, B_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sodass $A_n \cdot B_n \neq B_n \cdot A_n$. (Hinweis: Finden Sie zuerst die 2×2-Matrizen A_2 und B_2).