Algebra für Informatiker/innen
4. Übungsblatt für den 10. und 11. April 2008

25. Berechnen Sie für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$
die Matrix $B := A^T \cdot A$.

26. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ die entsprechenden $n \times 1$-Matrizen. Zeigen Sie:
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = A^T \cdot B = B^T \cdot A.$$
Berechnen Sie außerdem $A \cdot B^T$ und $B \cdot A^T$.

27. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $n \times n$-Matrizen A gilt $E_n \cdot A = A$.

28. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar ist und bestimmen Sie $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.

29. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

30. (a) Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$
und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

31. Bestimmen Sie eine parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge (über $\mathbb{R}$) des linearen Gleichungssystems $A \cdot z = b$, wobei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

32. Ergänzen Sie die Gleichung $3x - 4y + 2z = 0$ zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen, sodass das System keine Lösung/genau eine Lösung/genau zwei Lösungen/eine Gerade als Lösungsmenge/eine Ebene als Lösungsmenge hat.