Algebra für Informatiker/innen
3. Übungsblatt für den 3. und 4. April 2008

17. Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms mit Hilfe des Kreuzproduktes.

18. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen e und f?
$$\begin{aligned} e &: 2x + 3y - 4z = 3, \\ f &: 3x - 4y + 2z = 2. \end{aligned}$$

19. Berechnen Sie den (minimalen) Abstand des Punktes $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ von der Ebene $e : 3x - 2y + 2z - 4 = 0$.

20. Berechnen Sie die Ergebnisse falls möglich.

 (a) $\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 17\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

 (b) $\begin{pmatrix}5 & -3 & 4\\ 2 & 0 & 19\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9 & 4 & 3\\ -2 & -3 & 5\end{pmatrix}$

 (c) $\begin{pmatrix}3 & 9\\ 4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9 & 4 & 3\\ -2 & -3 & 5\end{pmatrix}$

 (d) $2008 \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

21. Berechnen Sie die Matrixprodukte.

 (a) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 9 & 4 & 2\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 7\\ -2 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

 (b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$

 (c) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$

 (d) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 4 & 2\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$

22. Zeigen Sie das Linksdistributivgesetz für $n \times n$-Matrizen:
$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

23. Eine $n\times n$-Matrix A *kommutiert* mit einer $n\times n$-Matrix B falls $A\cdot B = B\cdot A$. Geben Sie diejenigen 3×3-Matrizen an, die mit *allen* 3×3-Matrizen kommutieren, d.h. gesucht sind alle Matrizen $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sodass für alle $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt: $C \cdot M = M \cdot C$.

24. Finden Sie eine Formel für $\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$) und beweisen Sie diese.