Algebra für Informatiker/Innen
8. Übungsblatt für den 15. und 16. Mai 2008

57. Geben Sie jeweils den Rang der Matrix an.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

58. Ist

$$L(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix})?$$

59. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei x_0 eine Lösung des Systems $A \cdot x = b$. Sei L die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ und $N(A)$ der Nullraum von A. Dann gilt: $L = x_0 + N(A)$.

60. Widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels: Wenn das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eine Lösung hat, so besitzt für jede rechte Seite b das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ zumindest eine Lösung.

61. Der Vektor v hat bezüglich der Basis $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix})$ der Ebene ϵ die Koordinaten $(v)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich der Basis $B = (\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ -26 \end{pmatrix})$.

62. Die Ebene ϵ hat die Basen

$$A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$$

und

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A!

63. Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$. Zeigen Sie, dass ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a\rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b\rangle \end{pmatrix}$ hat, das heißt, zeigen Sie

$$(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a\rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b\rangle \end{pmatrix}.$$

Stimmt diese Formel für jede Basis (a, b) des $\mathbb{R}^2$?

64. Sei $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix})$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E.

   (a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

   (b) Wie lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich B?

   (c) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.